

Géométrie vectorielle.

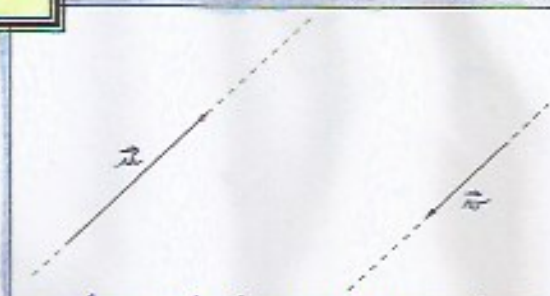
I. Vecteurs colinéaires.

Définition

Deux vecteurs sont dits colinéaires si ils ont la même direction.

Exemple :

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction, ils sont donc colinéaires.



Théorème

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- * $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
- * $\exists k \in \mathbb{R} / \vec{u} = k \cdot \vec{v}$

Remarque :

- * Si $k > 0$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens.
- * Si $k < 0$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire.
- * Par convention, le vecteur nul est colinéaire avec tous les vecteurs.

Critère de colinéarité

Dans un repère, on considère les vecteurs : $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$.
Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$

Démonstration :

- * Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\exists k \in \mathbb{R} / \vec{u} = k \vec{v}$

Donc $x = kx'$ et $y = ky'$

Donc $xy' - x'y = kx'y' - x'ky = 0$

Réciproquement : * Si $xy' - x'y = 0$

* Si $\vec{u} = \vec{0}$ OK

* Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $x \neq 0$ ou $y \neq 0$

On suppose $x \neq 0$

On pose $k = \frac{x'}{x}$

On a $x' = kx$

$xy' - x'y = 0$ donc $y' = \frac{x'}{x}y$

$y' = ky$

Donc $\vec{v} = k\vec{u}$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exemple :

$\vec{u}(2;1)$ et $\vec{v}(-6;3)$ $xy' - x'y = 2 \times 3 - (-6) \times 1 = -6 + 6 = 0$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

(Remarque : $\vec{v} = -3 \cdot \vec{u}$)



II. Equations de droite.

1) Vecteur directeur d'une droite

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur et (d) une droite.

On dit que $\vec{u}$ est vecteur directeur de (d) si $\vec{u}$ et (d) ont la même direction



2) Equation cartésienne d'une droite

Théorème

Toute droite a une équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Le vecteur $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de la droite.

Démonstration :

* Une droite a une équation de la forme $x = k$ ou $y = mx + p$.

Pour $x = k$ ou $mx - y = 0$

($ax + by + c = 0$ s'appelle équation cartésienne de droite)

* Démontrons que $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de (d): $ax + by + c = 0$

Soit $A(x_A; y_A) \in (d)$ donc $ax_A + by_A + c = 0$ | alors $\vec{AM}(x_M - x_A; y_M - y_A)$ | $-(ax_M + by_M) + (ax_A + by_A)$

Soit $M(x_M; y_M) \in (d)$ donc $ax_M + by_M + c = 0$ | $-b(y_M - y_A) - a(x_M - x_A)$ | $= -b y_M + b y_A - a x_M + a x_A$ | $= -(-c) + (-c)$

Exemple : Soit une droite d d'équation cartésienne $4x - 5y - 1 = 0$.

Alors le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(5; 4)$ est un vecteur directeur de d.

Donc $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires
Donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d)

Théorème réciproque (admis)

Soit a, b etc. trois nombres avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Alors l'ensemble des points $M(x; y)$ tel que $ax + by + c = 0$ est une droite.

☒ **Savoir faire :** Savoir déterminer une équation de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur

On considère un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(3; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1; 5)$.

$\vec{u}(-1; 5)$ est un vecteur directeur de (d).

Pour (d) on a une équation de la forme $5x + y + c = 0$

$A(3; 1) \in (d)$ donc $5x_A + y_A + c = 0$ soit $5 \times 3 + 1 + c = 0$ $c = -16$

$$5x + y - 16 = 0$$

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite d' passant par les points $B(5; 3)$ et $C(1; -3)$.

$\vec{BC}(-4; -6)$ donc d' a une équation de la forme $6x + 4y + c = 0$

$B(5; 3) \in (d')$ donc $6 \times 5 + 4 \times 3 + c = 0$ donc $c = -18$

Pour d' on a pour équation $-6x + 4y + 18 = 0$

3) Equation cartésienne et équation réduite

Si $b \neq 0$, alors l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ peut être ramenée à une équation réduite $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

Le coefficient directeur de la droite est $-\frac{a}{b}$, son ordonnée à l'origine est $-\frac{c}{b}$ et un vecteur directeur est $\vec{u}(1; -\frac{a}{b})$

Exemple : Soit d dont une droite d'équation cartésienne $4x + y - 6 = 0$.

un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}(-1; 4)$

un vecteur directeur de (d) est $\vec{v}(1; -4)$

l'équation réduite de (d) est $y = -4x + 6$ ($m = -4; p = 6$) | $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

4) Parallélisme de droites

Propriété

Soit (d) $ax + by + c = 0$ et (d') $a'x + b'y + c' = 0$

alors $(d) \parallel (d') \Leftrightarrow ab' - ba' = 0$

Démonstration :

$\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur de (d)

$\vec{v}(-b'; a')$ est un vecteur de (d')

$(d) \parallel (d') \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

$$\Leftrightarrow -ba' \times b'a = 0$$

$$\Leftrightarrow ab' - ba' = 0$$

II. Décomposition d'un vecteur.

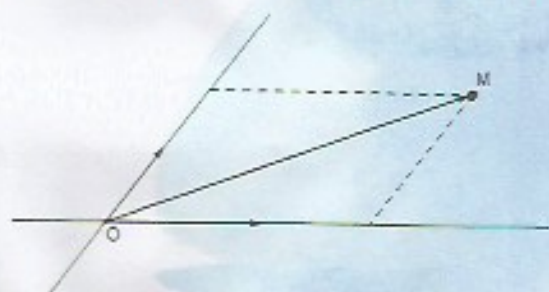
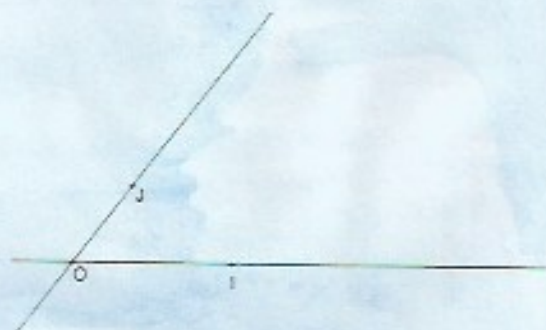
1) Repères du plan

Un repère du plan est donné par un triplé de point $(O; I; J)$

On dit que le repère est orthogonal si $(OI) \perp (OJ)$ et

On dit que le repère est orthonormal si $(OI) \perp (OJ)$
et $|OI| = |OJ|$

On pose $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$. Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires. On peut alors définir ce repère par $(O; \vec{i}; \vec{j})$



Théorème

Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On dit que M a pour coordonnées $(x; y)$ si $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. De même dire que $\vec{u}(x; y)$ signifie $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

2) Expression d'un vecteur en fonction de deux vecteurs non colinéaires

Théorème

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Alors pour tout vecteur $\vec{w}$, il existe un unique couple $(x; y)$ tel que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Savoir-faire : Savoir choisir une décomposition pertinente pour résoudre un problème.

Soit un triangle ABC. D est le milieu de [BC] et E est le milieu de [BD].

Le point F est défini par : $\vec{AF} = 3\vec{AB} + \vec{AC}$.

Démontrer que les points A, E et F sont alignés.



Plaçons nous dans le repère $(A; \vec{AB}; \vec{AC})$ ($\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires)
alors $A(0;0)$ $B(1;0)$ $C(0;1)$ $D(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ $E(\frac{3}{4}; \frac{1}{4})$ $F(3;1)$

Donc $\vec{AF}(\vec{3}; \vec{1})$ et $\vec{AE}(\frac{3}{4}; \frac{1}{4})$

Donc $\vec{AF} = 4 \cdot \vec{AE}$

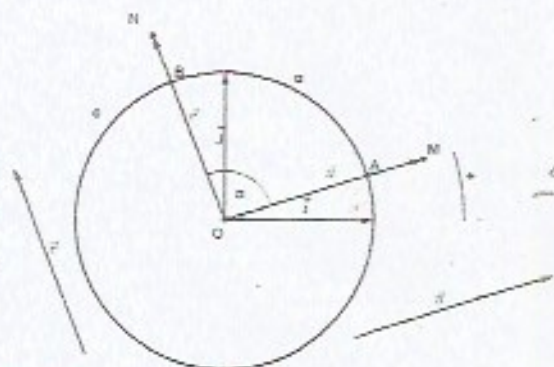
Donc $\vec{AF}$ et $\vec{AE}$ sont colinéaires

Donc A, E et F sont alignés.

III. Angle orienté d'un couple de vecteur.

1) définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On considère le cercle trigonométrique de centre O. Soit M et N tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$. Les demi droites $[OM)$ et $[ON)$ coupent le cercle en A et B. Soit α une mesure en radian de l'angle $\widehat{AOB}$.



Définition

On dit que α est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$.
Toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ est de la forme $\alpha + 2k\pi$ où k est un entier relatif.

2) Mesure principale d'un angle orienté

Définition

La mesure principale d'un angle orienté est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

3) Angle orientés et colinéarité.

Propriété

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens équivaut à $(\vec{u}; \vec{v}) = \alpha + 2k\pi$
 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires équivaut à $(\vec{u}; \vec{v}) = \pi + 2k\pi$

4) Relation de Chasles

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls $(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{w}) = (\vec{u}; \vec{w})$

Conséquences

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls : $(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{w}) = (\vec{u}; \vec{w})$
 $\odot (\vec{v}; \vec{u}) = -(\vec{u}; \vec{v})$ $\odot (\vec{u}; -\vec{v}) = -\pi + (\vec{u}; \vec{v})$ $\odot (-\vec{u}; \vec{v}) = -\pi - (\vec{u}; \vec{v})$ $\odot (-\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v})$

