Probabilités.

I. Vocabulaire (rappels).

Définition

Une <u>expérience</u> est <u>aléatoire</u> lorsqu'elle a plusieurs résultats ou <u>issues</u> et que l'on ne peut pas prévoir, à priori, quel résultat se produira.

On considère l'expérience aléatoire suivante : « On lance une pièce 100 fois et on calcule la fréquence d'obtention de Pile ». $f = \frac{48}{100} = 0{,}48$. On calcule la fréquence d'obtention de Pile pour tous les lancers de la classe. $f = \frac{1033}{2077} = 0{,}497$.

Définition

Les fréquences obtenues d'un événement ***E*** se rapprochent d'une valeur théorique lorsque le nombre d'expérience augmente (Loi des grands nombres). Cette valeur s'appelle la <u>probabilité</u> de l'événement ***E***.

*Dans l'expérience aléatoire ci-dessus, on appelle **E** l'événement « obtenir Pile ». On a alors $p(\mathbf{E}) = 0{,}5$.*

Définition

- Un <u>évènement</u> est constitué de plusieurs issues d'une même expérience aléatoire.
- Les <u>événements élémentaires</u> sont les événements réduits à une unique issue de l'expérience.

On lance un dé cubique. Il y a donc six évènements élémentaires ("obtenir 1", "obtenir 2", ...). L'évènement "obtenir un nombre impair" est constitué de 3 évènements élémentaires.

Définition

- La probabilité $p(\mathbf{E})$ d'un événement ***E*** est telle : $0 \leq p(\mathbf{E}) \leq 1$.
- La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Dans l'exemple ci-dessus, le dé est équilibré. Chaque évènements élémentaires a une probabilité égale à $\frac{1}{6}$ (situation équiprobable). Leur somme est égale à $6 \times \frac{1}{6} = 1$. L'évènement "obtenir un nombre impair a pour probabilité $\frac{1}{6} \times 3 = 0{,}5$.

Définition

- On appelle événement contraire d'un ***E***, l'événement qui se réalise lorsque ***E*** ne se réalise pas.
- On le note $\bar{E}$ et on a $p(\bar{E}) = 1 - p(\mathbf{E})$.

On considère un jeu de 52 cartes. Soit E, l'évènement "obtenir une figure". $p(E) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$. $\bar{E}$ est l'évènement "obtenir un nombre". $p(\bar{E}) = \frac{40}{52} = \frac{10}{13}$. On a bien $p(\bar{E}) = 1 - p(E)$

Définition

- <u>L'événement "A et B"</u>, noté $A \cap B$, est réalisé lorsque les deux événements A et B sont simultanément réalisés.
- <u>L'événement "A ou B"</u>, noté $A \cup B$, est réalisé lorsqu'au moins l'un des deux événements est réalisé.

On a $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

A : "obtenir une dame" ; B : "obtenir un coeur" $p(A) = \frac{4}{52}$ $p(B) = \frac{13}{52}$

$A \cup B$: "obtenir une dame ou un coeur" $A \cap B$: "obtenir la dame de coeur".

$p(A \cup B) = \frac{16}{52}$ $p(A \cap B) = \frac{1}{52}$ $P(A) + P(B) - p(A \cap B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$

II. Variable aléatoire et loi de probabilité.

1. Variable aléatoire :

On considère l'expérience aléatoire suivante : "On lance un dé à six faces non truqué et on note le nombre de la face supérieure." L'ensemble de toutes les issues possibles Ω = {1; 2; 3; 4; 5; 6} s'appelle l'univers des possibles. On considère l'événement A : "On obtient un résultat pair." On a donc : A = {2; 4; 6}. On considère l'événement élémentaire E : "On obtient un 3". On a donc : E = {3}.

On considère le jeu suivant :

- *Si le résultat est pair, on gagne 2€.*
- *Si le résultat est 1, on gagne 3€.*
- *Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4€.*

On a défini ainsi une variable aléatoire X *sur* Ω = {1; 2; 3; 4; 5; 6} *qui peut prendre les valeurs* +2 ; +3 ; −4

On a donc : X (1) = 3, X (2) = 2, X (3) = −4, X (4) = 2, X (5) = −4, X (6) = 2

Définition

Lorsqu'à chaque évènement élémentaire d'une expérience aléatoire on associe un nombre réel, on dit qu'on définit une variable aléatoire.

2. Loi de probabilité :

Lorsque $x_1, x_2, \dots x_n$ *sont les valeurs prise par une variable aléatoire* X, *on note* $(X = x_i)$ *l'événement « X prend la valeur* x_i ». (avec $1 \leq i \leq n$)

Revenons au jeu précédent. Déterminons les probabilités de toutes les valeurs pouvant être prise par X.

$p(X=2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (réalisé par 3 évènements élémentaires)

$p(X=3) = \frac{1}{6}$ (réalisé par 1 évènement élémentaire)

$p(X=-4) = \frac{2}{6}$ (réalisé par 2 évènements élémentaires)

On peut résumer les résultats dans un tableau :
On dit que ce tableau définit la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

x_i	2	3	−4
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$

Définition

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω et prenant un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.
La loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i la probabilité $p(X = x_i)$.

☑ *Savoir faire : Savoir déterminer une loi de probabilité :*

On considère l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."
On considère le jeu suivant :

♦ *Si on tire un cœur, on gagne 2€.* ♦ *Si on tire un roi, on gagne 5€.* ♦ *Si on tire une autre carte, on perd 1€.*

On appelle X *la variable aléatoire qui à une carte tirée associe le gain ou la perte correspondant.*
Déterminer la loi de probabilité de X.

La variable aléatoire X peut prendre 3 valeurs : 2 ; 5 et −1

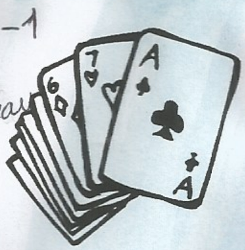
$p(X=2) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

On établit la loi de probabilité avec tableau

$p(X=5) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

$p(X=5) = \frac{20}{32}$

x_i	2	5	−1
$p(X=x_i)$	$\frac{8}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{20}{32}$



3. Espérance d'une loi de probabilité :

Définition

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω et prenant un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
L'espérance mathématique de la loi de probabilité de X est le nombre noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = x_1 \times p(X = x_1) + x_2 \times p(X = x_i) + \ldots + x_n \times p(X = x_n).$$

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer l'espérance d'une loi de probabilité :*

Déterminer l'espérance du jeu précédent.

$E(X) = 2 \times p(X=2) + 5 \times p(X=5) - 1 \times p(X=-1) = 2 \times \frac{8}{32} + 5 \times \frac{4}{32} - 1 \times \frac{20}{32} = \frac{16}{32}$

Définition : La variance de X, notée $V(x)$ est la moyenne des carrés des écarts à l'espérance $V(x) = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} p_k (x_k - E(X))^2}{\sum p_k} = \sum_{k=1}^{n} p_k (x_k - E(x))^2$

Exemple : $V(x) = \frac{8}{32} \times \left(2 - \frac{16}{32}\right)^2 + \frac{4}{32} \times \left(5 - \frac{16}{32}\right)^2 + \frac{20}{32} \times$

Remarque : L'espérance mathématique peut être interprétée comme une valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétition.

l'écart type est $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$

Exercice bilan : Une loterie est constituée de 1000 billets vendus 1 € chacun. Parmi les billets vendus, un permet de gagner 400 €, deux permettent de gagner 100 € et dix rapportent 10 €.

1. *Un joueur achète un billet. On appelle G la variable aléatoire qui à un billet associe le gain du joueur.*
   - **a.** *Définir la loi de probabilité de G.*
   - **b.** *Calculer E(G).*
   - **c.** *Le jeu rapporte-t-il à l'organisateur de la loterie ou aux joueurs ?*

Les valeurs de G sont : $\{399 ; 99 ; 9 ; -1\}$

$p(G=399) = 0{,}001$
$p(G=99) = 0{,}002$
$p(G=9) = 0{,}01$
$p(G=-1) = 0{,}987$

On en déduit la loi de probabilité de G.

x_i	399	99	9	-1
$P(G=x_i)$	0,001	0,002	0,01	0,987

Donc $E(G) = 399 \times 0{,}001 + 99 \times 0{,}002 + 9 \times 0{,}01 - 1 \times 0{,}987 = \boxed{-0{,}3}$

L'espérance est négative l'organisateur est gagnant

(Lorsque $E(X) = 0$, on dit que le jeu est équitable)

Pour être sûre de gagner, une personne achète tous les billets.
   - **d.** *Quelle est le bilan financier de son opération ?*
   - **e.** *Quelle est la perte moyenne par billet acheté ?*

Bilan : $-1000 + 400 + 2 \times 100 + 10 \times 10 = -300$ Perte moyenne $= \frac{-300}{1000} = \boxed{-0{,}3}$

Propriété : Soit X est une variable aléatoire alors tous nombres a et b $E(aX + b) = aE(X) + b$
et $V(aX) = a^2 V(X)$