Suites géométriques.

I. Définition d'une suite géométrique.

On considère la suite (u_n) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égal à 3. Si le premier terme est égal à 2, les premiers termes successifs sont : $u_0 = 2$ $u_1 = 2\times3 = 6$ $u_2 = 6\times3 = 18$ $u_3 = 18\times3 = 54$. De façon plus générale, pour tout nombre entier n, on a $u_{n+1} = 3\times U_n$

On dit que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est une <u>suite géométrique</u> s'il existe un nombre q tel que, pour tout n, $u_{n+1} = q\times U_n$
Le nombre q est appelé la <u>raison</u> de la suite (u_n).

<u>Exemple concret :</u> On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élève à 4%. Chaque année, le capital est multiplié par 1,04 *Ce capital suit une progression géométrique de raison* 1,04

☑ *<u>Savoir faire : Savoir démontrer qu'une suite est géométrique :</u>*

1) La suite (u_n) définie par : $u_n = 2^{n+3}$ est-elle géométrique ?

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+4}}{2^{n+3}} = 2^1 = 2$ | Donc $\forall n$ $U_{n+1} = 2\times U_n$
Donc (U_n) est géométrique
de 1er terme $u_0 = 2^3 = 8$ et de raison $q = 2$

Définition

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n$.

Exemple : On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

Alors pour tout n $u_n = 3\times 2^n$

☑ *<u>Savoir faire : Savoir déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique :</u>*

1) Soit (u_n) la suite géométrique tel que $u_2 = 12$ et $u_5 = -96$. Détermine sa raison et son premier terme.

$U_2 = U_0\times q^2 = 12$ $U_5 = U_0\times q^5 = -96$ $\frac{U_5}{U_2} = \frac{U_0\times q^5}{U_0\times q^2} = \frac{q^5}{q^2} = \frac{-96}{12} = -8 = q^3$

$q^3 = -8$ donc $q = -2$ $U_2 = U_0\times q^2 = U_0\times(-2)^2 = 4\times U_0 = 12$ donc $U_0 = \frac{12}{4} = 3$

II. Sens de variations d'une suite géométrique.

On considère la suite (u_n) définie par : pour tout nombre entier n, $u_n = 3\times 2^n$. Etudions ses variations.

$U_{n+1} - U_n = 3\times2^{n+1} - 3\times2^n = 3\times2^n\times2^1 - 3\times2^n\times1 = 3\times2^n(2-1) = 3\times2^n$

Donc $U_{n+1} - U_n \geqslant 0$ Donc $u_{n+1} \geqslant U_n$ Donc la suite est croissante.

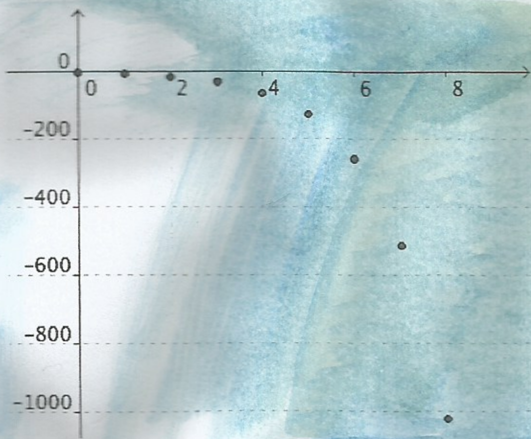
Définition

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, et de premier terme non nul u_0 alors :

- Pour $u_0 > 0$:
  - Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
  - Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Pour $u_0 < 0$:
  - Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
  - Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est croissante.

III. Représentation graphique d'une suite géométrique.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n, par $u_n = -4 \times 2^n$. Voici sa représentation graphique.



	A	B
1	n	u_n
2	0	-4
3	1	-8
4	2	-16
5	3	-32
6	4	-64
7	5	-128
8	6	-256
9	7	-512
10	8	-1024

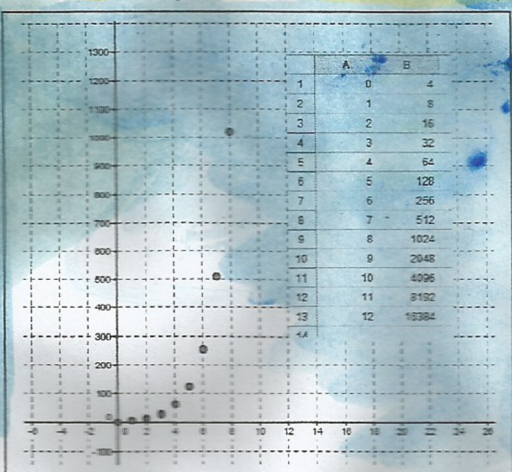
=-4x2^A2

$U_n = -4 \times 2^n$

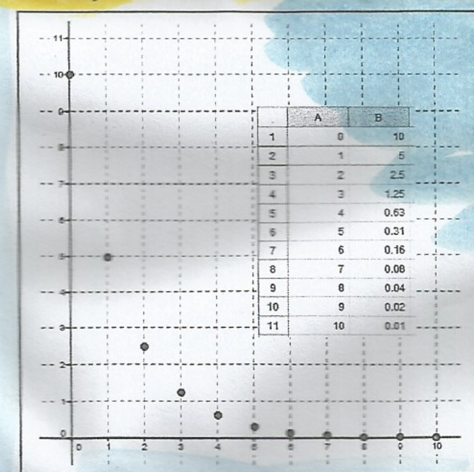
(U_n) est une suite géometrique de 1^{er} terme $U_0 = -4$ et de raison $q = 2$.

La suite géométrique (u_n) définie par $u_n = 4 \times 2^n$ est croissante car $U_0 = 4 > 0$ et $q = 2 > 1$

La suite géométrique (u_n) définie par $u_n = 10 \times (\frac{1}{2})^n$ est décroissante car $U_0 = 10 > 0$ et $q = \frac{1}{2}$ $0 < q < 1$



	A	B
1	0	4
2	1	8
3	2	16
4	3	32
5	4	64
6	5	128
7	6	256
8	7	512
9	8	1024
10	9	2048
11	10	4096
12	11	8192
13	12	16384



	A	B
1	0	10
2	1	5
3	2	2.5
4	3	1.25
5	4	0.63
6	5	0.31
7	6	0.16
8	7	0.08
9	8	0.04
10	9	0.02
11	10	0.01

IV. Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Propriété

Pour tout entier naturel non nul n et q un réel différent de 1, on a : $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Démonstration :

$(1-q)(1+q+q^2+\ldots q^{n-1}+q^n) = 1-q+q-q^2+q^2-q^3 \ldots q^{n-1} - q^{n-1} + q^n - q^{n+1} = 1-q^{n+1}$

Donc $1+q+q^2 \ldots q^{n-1}+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ Ce qui s'écrit $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

☑ Savoir faire : Savoir calculer la somme des termes d'une suite géométrique :

Calcule la somme $S = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{13}$

$S = \frac{1-3^{14}}{1-3} = \frac{1-3^{14}}{-2} = \frac{3^{14}-1}{2} = 2\,391\,484$

Le prince de Bagdad : $1+2+2^2+\ldots 2^{63}$

Donc $S = \frac{1-2^{64}}{1-2} \approx 1{,}8 \times 10^{19}$

2) Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

$S = \sum_{k=0}^{n} u_{10} = 3 + 3 \times 2 + 3 \times 2^2 + \dots 3 \times 2^9 = 3(1 + 2 + 2^2 \dots 2^9) = 3 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 3069$

3) Un jeune entrepreneur investit un capital de départ de 20 000 € pour son entreprise. Afin de la dynamiser, il injecte chaque mois une somme supplémentaire à son capital, celle-ci diminue de 30% chaque mois. Calculer le total du capital investi à la fin de la première année.

$u_0 = 20000 \quad u_1 = 0{,}7 \times 20000 \dots \quad u_n = (0{,}7)^n \times u_0$

$S = \sum_{k=0} (0{,}7)^k \times u_0 = 20000 \times \sum_{k=0} (0{,}7)^k = 20000 \times \frac{1 - (0{,}7)^{12}}{1 - 0{,}7} =$

V. Suite arithmético-géométriques.

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est une arithmético-géométrique s'il existe deux nombres a et b tels que pour tout entier n, $u_{n+1} = a\, u_n + b$.

Exemple : Un investisseur dépose 10000 € sur un compte rémunéré à 5% par an. Chaque année suivante, il dépose 500€ de plus. On note (u_n) la somme épargnée à l'année n.

On a alors : $u_{n+1} =$ 1,05 $u_n +$ 500 et $u_0 =$ 10000 La suite (U_n) est arithmético-géométrique.

☑ Savoir faire : Savoir étudier une suite arithmético-géométrique (exemple BAC) :

Une réserve décide d'implanter sur son vaste territoire de savane une nouvelle population d'antilopes, des impalas. Au 1er janvier 2013, 2 500 impalas sont lâchés. Les scientifiques zoologistes estiment que le nombre d'impalas augmentera chaque année de 4 % par le simple jeu des naissances et des décès naturels.
Pour limiter les phénomènes de consanguinité, 50 impalas supplémentaires seront ajoutés chaque année.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'impalas dans cette réserve au 1er janvier de l'année 2013 + n.

1) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}04\, u_n + 50$.

2) Déterminer u_0, u_1 et u_2.

Chaque année on prévoit une augmentation de 4%, donc $1{,}04 U_n$ et on ajoute 50 impalas donc $U_{n+1} = 1{,}04 U_n + 50$ $\quad U_0 = 2500$, $U_1 = 1{,}04 \times 2500 + 50 = 2650$, $U_2 = 1{,}04 \times 2650 + 50 = 2806$

3) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n + 1\,250$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer v_n en fonction de n.

c. En déduire que $u_n = 3\,750 \times 1{,}04^n - 1\,250$.

$V_{n+1} = U_{n+1} + 1250 = 1{,}04 U_n + 50 + 1250 = 1{,}04 U_n + 1300 = 1{,}04\left(U_n - \frac{1300}{1{,}04}\right) = 1{,}04(U_n - 125$

Donc $V_{n+1} = 1{,}04 \times V_n$ Donc V_n est une suite geométrique de raison 1,04 et de 1er terme $V_0 = U_0 + 1250 = 3750$

Donc $\forall n$ $\quad V_n = V_0 \times q^n = 3750 \times (1{,}04)^n \quad U_n = V_n - 1250 = 3750 \times (1{,}04)^n - 1250$

☑ Savoir-faire : Savoir déterminer un seuil avec un algorithme :

4) Après une étude approfondie des zoologues, ce modèle d'évolution ne sera plus valable lorsque la population aura doublé par rapport au 1er janvier 2013. Déterminer à partir de quelle année le modèle d'évolution ne sera plus valable.

```
Variables : n, u
n prend la valeur 0
u prend la valeur 2500
Tant que u < 5000 faire
n prend la valeur n+1
u prend la valeur 1,05U+500
Fin du Tant que
Afficher n
```

l'instruction "Tant que" calcule les boucles jusqu'à que l'objectif soit atteint.

Sur TI

```
PROGRAM:SEUIL
:Input A
: 0 →N
:1000→U
:While U < 5000
: N+1 →N
:1,05U+500→U
:End
:Disp N
```

Sur Casio

```
======SEUIL
"A="?→A↵
→N↵
→U↵
While U ↵
→N↵
→U↵
WhileEnd↵
N
```