Fonctions polynômes du second degré.

I. Définition.

Définition

On appelle <u>fonction polynôme de degré 2</u> ou <u>trinôme du second degré</u>, toute fonction f définie sur IR par une expression de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$. où les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

☑ *Savoir faire : Savoir reconnaitre les coefficients d'un trinôme du second degré :*
Identifie les coefficients des trinômes suivants :

♦ $f(x) = 2x^2 + 3x-5$ ♦ $g(x) = x^2 - x$ ♦ $h(x) = -x^2 + 3$ ♦ $i(x) = (2x + 5)(-x + 4)$

....
....
....

II. Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré.

Exemple :
Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)= 2x^2 -20x + 10$.
On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique : $f(x)=$ …. $(x$ - ….$)^2$ + ….

....
....
....

Forme générale:
....
....
....
....
....
....

Définition

Toute fonction polynôme f du deuxième degré peut s'écrire sous la forme :
....où α et β sont deux nombres réels.
Cette écriture s'appelle la <u>forme canonique</u> de f.

Remarque : Si $f(x) = ax^2 + bx +c$. on a alors α = ... et β = ...

☑ *Savoir faire : Savoir trouver la forme canonique d'un trinôme du second degré :*
Détermine la forme canonique de la fonction f ayant pour expression $f(x)= -x^2 + 4x -1$.

....
....
....
....

III. Représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré.

Propriété

Soit f définie sur IR par $f(x) = ax^2 + bx + c$. La courbe représentative de f est une ……………………………
Son sommet a pour abscisse x_s =………. La droite qui a pour équation ……….est l'axe de symétrie de la courbe.
- ♦ Si $a < 0$ alors la parabole a les branches tournées vers le …………………..
- ♦ Si $a > 0$ alors la parabole a les branches tournées vers le …………………..

Remarque : En utilisant la forme canonique, on obtient directement les coordonnées du sommet de la parabole.

☑ Savoir faire : Savoir dresser le tableau de variations d'une fonction trinôme du second degré :

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f_1 définie par $f_1(x)= 2x^2 + 3x-5$:

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

2) Dresser le tableau de variations de la fonction f_1 définie par $f_1(x)= -x^2 + 2x +3$:

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

IV. Résolution d'une équation du second degré.

☑ Savoir faire : Savoir résoudre une équation produit nul du second degré :

Résoudre l'équation (E_1) : $(-2x + 3) (3x + 5) = 0$.

………
………
………

Remarque : $(-2x + 3) (3x + 5)$ =……………………………………………… = - 6 (…………………) (…………………)

☑ Savoir faire : Savoir résoudre une équation du type (E) : $x^2 = a$:

Résoudre les équations suivantes :

♦(E_1) : $x^2 = 16$ ♦(E_2) : $x^2 = 13$ ♦(E_3) : $x^2 = 0$ ♦(E_4) : $x^2 = -4$

……………………………… ……………………………… ……………………………… ………………………………
……………………………… ……………………………… ……………………………… ………………………………
……………………………… ……………………………… ……………………………… ………………………………

☑ Savoir faire : Savoir factoriser une expression avec un facteur commun ou avec une identité remarquable:

- $f(x) = 2(x+1)(x-3) - 3(x+1)^2$
- $g(x) = x^2 - 25$
- $h(x) = (x+1)^2 - (2x+3)^2$

....

....

....

....

Définition

On appelle discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

☑ Savoir faire : Savoir calculer le discriminant d'un trinôme :

Dans chaque cas ci-dessous calcule le discriminant :

- $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$
- $g(x) = x^2 - x$
- $h(x) = -x^2 + 3$
- $i(x) = (2x + 5)(-x + 4)$

....

....

....

Remarque : En utilisant la forme canonique on obtient :

....

....

....

Propriété

Soit f une fonction polynôme du deuxième degré définie sur IR par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ alors

- Si $\Delta = 0$:...

- Si $\Delta > 0$: ....

☑ Savoir faire : Savoir factoriser une expression du second degré :

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x^2 + x - 6$.

....

....

....

Application aux équations du second degré.

Propriété

Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$: ....
- Si $\Delta = 0$: ....
- Si $\Delta > 0$: ....

☑ Savoir faire : Savoir résoudre toutes les équations du second degré :

- (E_1) : $x^2 + x - 6 = 0$
- (E_2) : $-2x^2 - 4x + 30 = 0$
- (E_3) : $-x^2 + 3x - 5 = 0$

....

....

....

....

....

....

V. Signes d'une fonction polynôme du second degré.

	$\Delta > 0$	**$\Delta = 0$**	**$\Delta < 0$**
a > 0			
a < 0			

☑ *Savoir faire : Savoir résoudre les inéquations du second degré graphiquement :*

1) Résoudre les inéquations suivantes :

♦ (I_1) : $x^2 + x - 6 > 0$

....

....

x	
Signe de x^2+x-6	

....

♦ (I_2) : $-2x^2 - 4x + 30 \leq 0$

....

....

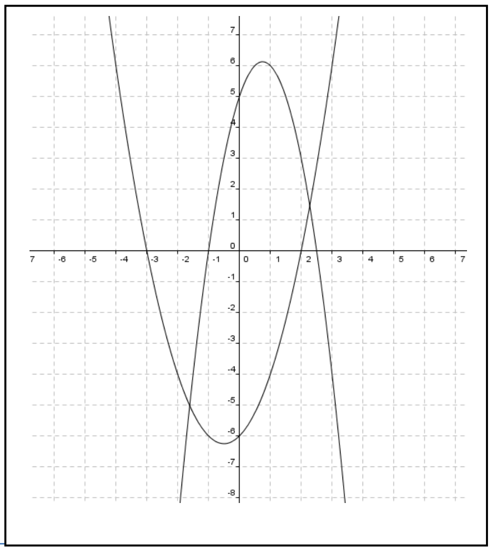
x	
Signe de $-2x^2-4x+30$	

....

2) Soit f et g les fonctions définie sur IR par

$f(x) = -2x^2 + 3x+5$ et $g(x) = x^2 + x - 6$.

Résoudre (I_1) : $-2x^2 + 3x+5 \leq x^2 + x - 6$. Interpréter le résultat.



....

....

....

....

....

....

....

....

....

VI. Application à l'économie : Recherche d'un bénéfice maximum.

Une entreprise fabrique un produit. La production mensuelle ne peut pas dépasser 15 000 articles.
Le coût total, exprimé en milliers d'euros, de fabrication de x milliers d'articles est modélisé par la fonction C définie sur $]0;15]$ *par :* $C(x) = 0,5x^2 + 0,6x + 8,16$.
La représentation graphique de la fonction coût total est donnée ci-dessous.

1) *Chaque article fabriqué est vendu au prix unitaire de 8 €. On désigne par $R(x)$ le montant en milliers d'euros de la recette mensuelle obtenue pour la vente de x milliers d'articles.*

a) *Exprimer $R(x)$ en fonction de x.*

....

b) *Tracer la courbe D représentative de la fonction recette.*

....

c) *Par lecture graphique déterminer :*

♦ *L'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif*

....

....

♦ *La production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.*

....

2) *On désigne par $B(x)$ le bénéfice mensuel, en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles.*

a) *Montrer que le bénéfice exprimé en milliers d'euros, lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles, est donné par $B(x) = -0,5x^2 + 7,4x - 8,16$. avec $x \in]0;15]$.*

....

....

b) *Étudier le signe de $B(x)$. En déduire la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice.*

....

....

....

....

x	
Signes de $B(x)$	

c) *Étudier les variations de la fonction B sur $]0;15]$. En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?*

....

....

....

....

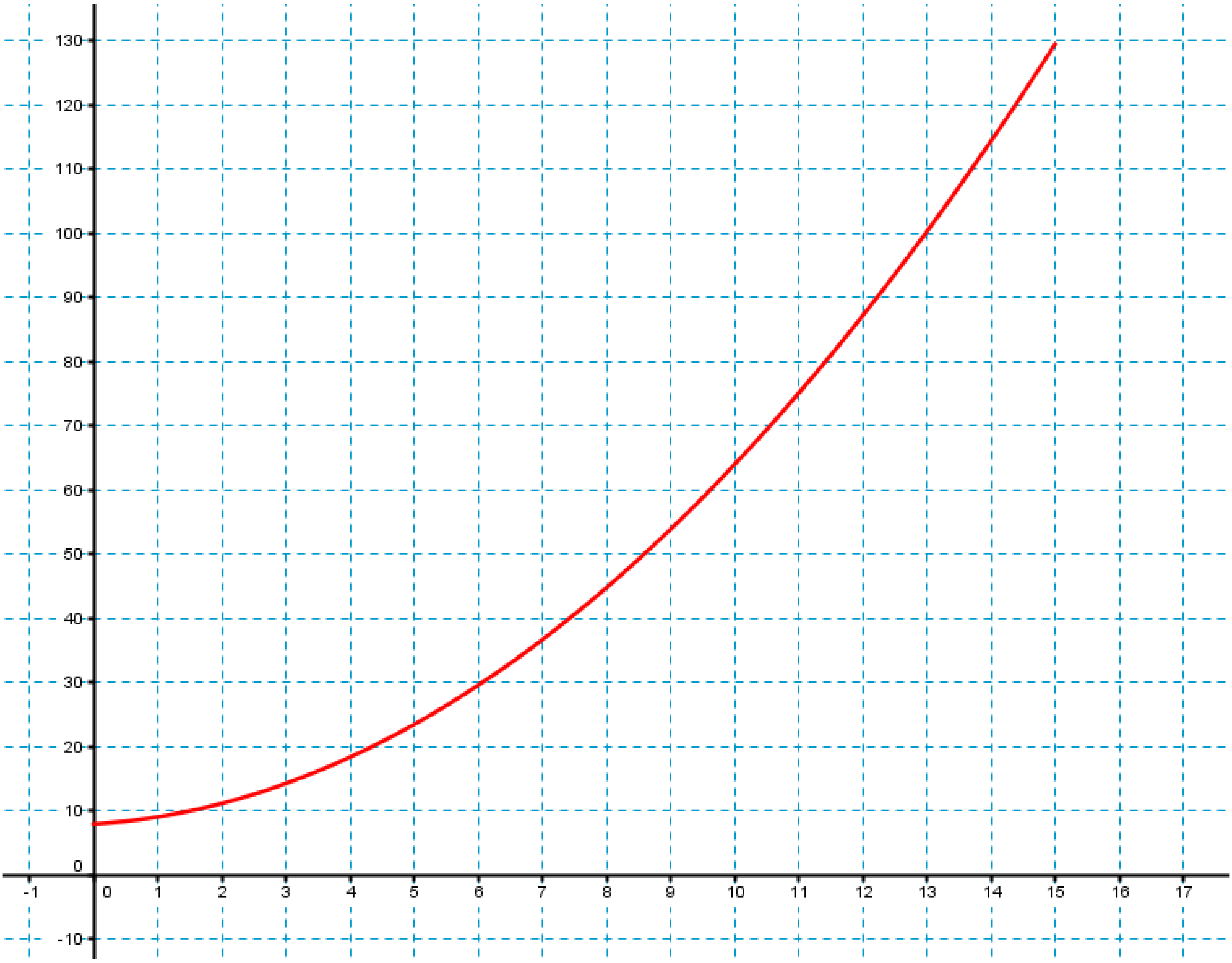
x	
Variations de $B(x)$	

....

....

....

....


130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17