Chap 7 : Polynome de second degrés

I - fonction de réference : la fonction carrée

$x \longmapsto x^2$

* L'ensemble de définition de la fonction carrée est définie en $\mathbb{R}$.

* Etude de variations : montrant que c est croissante sur $0 + \infty$

Soit a et b $\in$ à $[0 ; +\infty[$ tel que $a < b$
comparons $c(a)$ et $c(b)$

$$c(a) - c(b) = a^2 - b^2$$

Donc $c(a) - c(b) = (a+b)(a-b)$

ou $a + b > 0$ sur $a > 0$ et $b > 0$
et $a - b < 0$ car $a < b$

Donc $c(a) - c(b) < 0$
Donc $c(a) < c(b)$
Donc c est croissante sur $]0 ; +\infty[$

Montrant que c est décroissante sur $]-\infty; 0[$.

Soit a et b $\in]-\infty; 0[$ tel que $a < b$.
comparons c (a) et c(b)

Donc $c(a) - c(b)$

* Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de $f(x)$	↘	0	↗

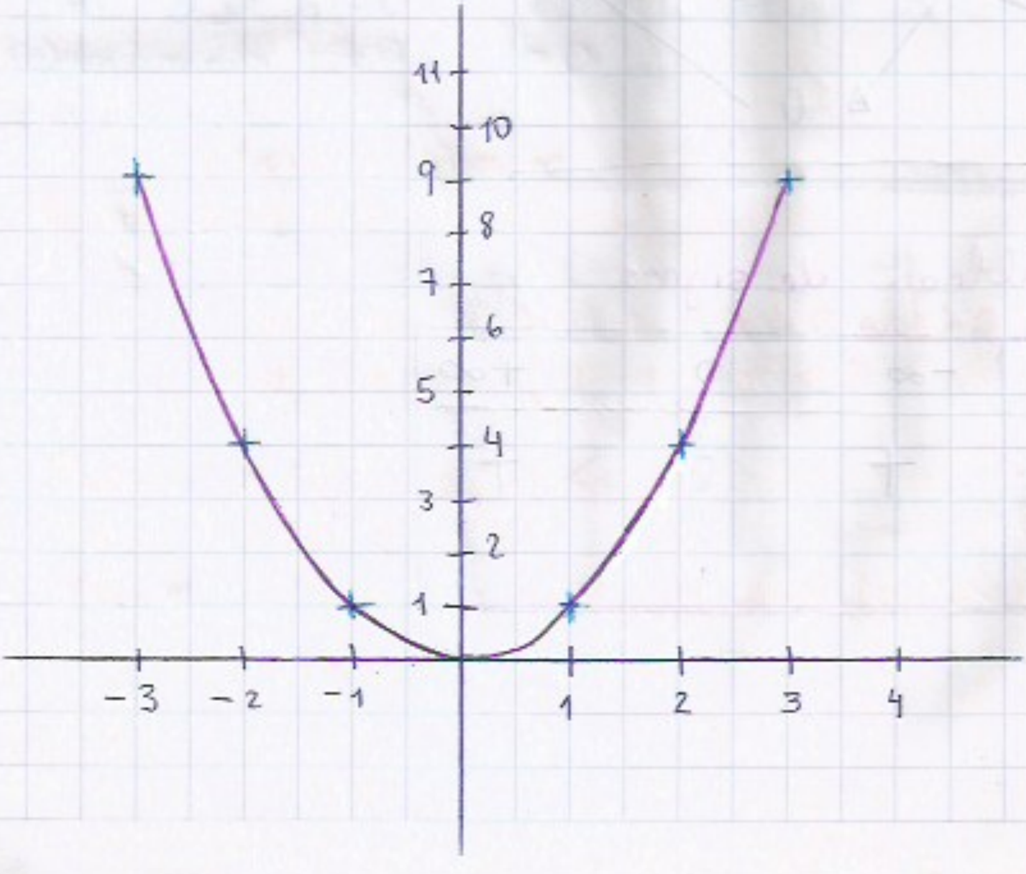
* Tableau de signes

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signes de $f(x)$	$+$	0	$+$

* Interprétation graphique

La courbe de la fonction x^2 est au dessus de l'axe des abscisses, qu'elle coupe en un point, l'origine $(0;0)$

x	-3	-2	$-1{,}5$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1{,}5$	2	3
$c(x)$	9	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	9



On dit que la courbe est une parabole.

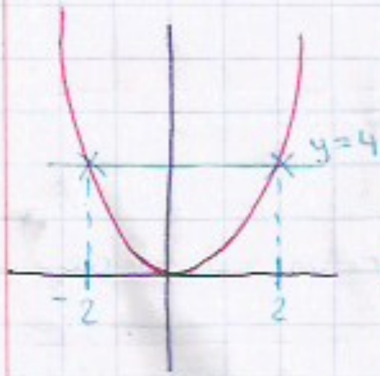
Elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

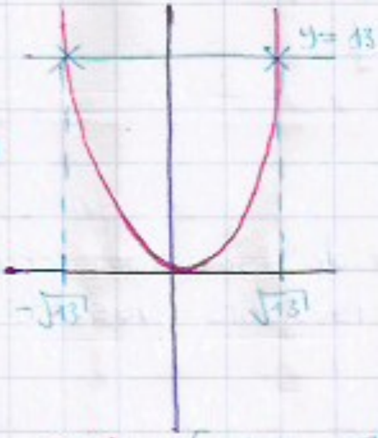
On dit que l'origine est le sommet de la parabole

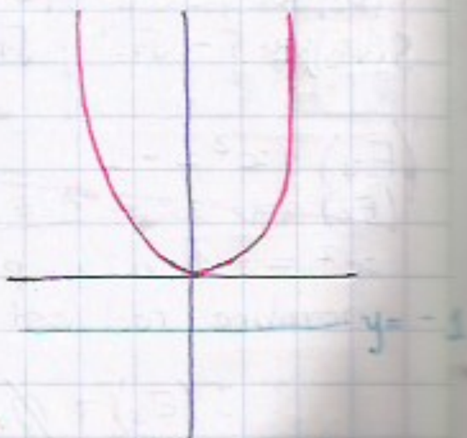
* Applications aux équations de second degré de la forme : $(E) \, x^2 = a$.

⇒ Résolution graphique.

$(E_1) : x^2 = 4$ $(E_2) : x^2 = 13$ $(E_3) : x^2 = -1$







$S(E_1) = \{-2 ; 2\}$ $S(E_1) = \{-\sqrt{13} ; \sqrt{13}\}$ $S(E_3) = \emptyset$

⇒ Résolution algébrique

$(E_1) : x^2 = 4$

$(E_1) \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$

$(E_1) \Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0$

$(E_1) \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0$

Donc $x - 2 = 0$ ou $x + 2 = 0$

Donc $x = 2$ ou $x = -2$

$$S(E_1) = \{-2 ; 2\}$$

$(E_2) : x^2 = 13$

$(E_2) \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{13}^2 = 0$

$(E_2) \Leftrightarrow (x - \sqrt{13})(x + \sqrt{13}) = 0$

$S(E_2) = \{-\sqrt{13} ; \sqrt{13}\}$

$(E_3) : x^2 = -1$

~~$(E_3) \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$~~

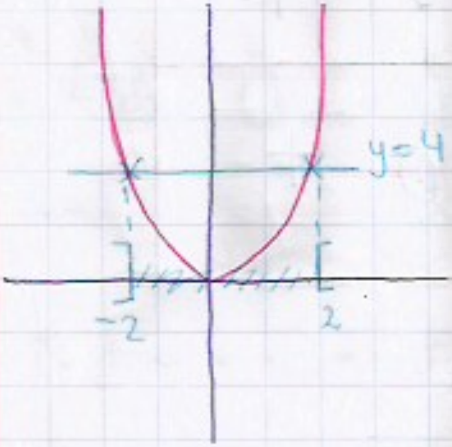
$x^2 = -1$ n'a pas de solution car un carré de nombre réel est toujours positif.

$$S(E_3) = \emptyset$$

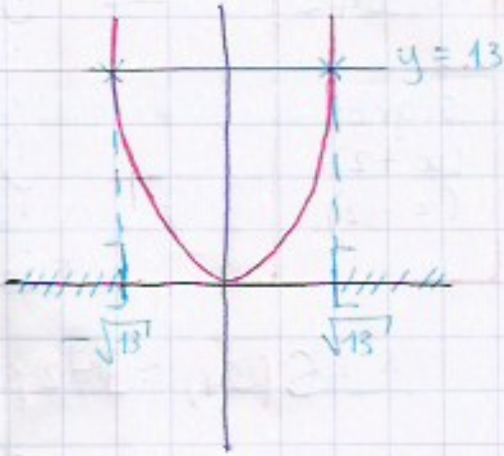
* Application avec inéquations du second degrés de la forme : $(I) : x^2 < a$.

⇒ Résolution graphique

$(I_1) : x^2 < 4$



$(I_2) : x^2 \leq 13$



$S(I_1) =]-2 ; 2[$

$S(I_2) =]-\infty ; -\sqrt{13}] \cup [\sqrt{13} ; +\infty$

⇒ Résolution algébrique

$(I_1) : x^2 < 4$

$(I_1) \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0$

$(I_1) \Leftrightarrow (x-2)(x+2) < 0$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signes de $x-2$		$-$	0	$-$	0	$+$	
Signes de $x+2$		$-$	0	$+$	0	$+$	
Signes $(x+2)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S(I_1) =]-2\,;2[$

II - fonction polynome du second degré

Définition: On dit qu'une fonction est polynome du second degré si son expression est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$

Exemple: • $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$

$a = 3$ $\quad$ $b = 2$ $\quad$ $c = 1$

- $f(x) = -x^2 + 3$

$a = -1$ $\quad b = 0$ $\quad c = 3$

- $f(x) = 5x^2 - 2x$

$a = 5$ $\quad b = -2$ $\quad c = 0$

- $f(x) = (2x+1)(x-3) = 2x^2 - 6x + x - 3 = \boxed{2x^2 - 5x - 3}$

$a = 2$ $\quad b = -5$ $\quad c = -3$

* Forme canonique d'un trinome du second dégré.

Définition: On appelle forme canonique d'un trinome de second degré l'écriture de l'expression sous la forme $f(x) = a(x - \alpha) + \beta$.

Exemple: $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

$$f(x) = -2\left(x^2 - 2x - \frac{1}{2}\right)$$
$$f(x) = -2\left[(x-1)^2 - 1 - \frac{1}{2}\right]$$
$$f(x) = -2\left[(x-1)^2 - \frac{3}{2}\right]$$

$$f(x) = -2(x-1)^2 + 3.$$

$f(x) = x^2 + 6x - 5$

$f(x) = (x+3)^2 - 9 - 5$

$f(x) = (x+3)^2 - 14$

Propriété :

Soit f tel que $f(x) = ax^2 + bx + c$
et sa forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$
alors $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

Application

Determiner la forme canonique de $f \,/\, f(x) = 3x^2 + 12x -$

$f(x) = 3x^2 + 12x - 5$

$a = 3 \quad b = 12 \quad c = -5$

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2 \times 3} = -2 \qquad \beta = f(\alpha) = 3 \times (-2)^2 + 12 \times (-2) - 5$
$= -17$

$f(x) = 3(x+2)^2 - 17$

$f(x) = -x^2 + 4x - 8 \quad a = -1 \quad b = 4 \quad c = -8$

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \times (-1)} = 2$

$\beta \; f(\alpha) = f(2) = -2^2 + 4 \times 2 - 8 = -4$

Donc $f(x) = -(x-2)^2 - 4$.

$f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

$a = 2 \quad b = -3 \quad c = 4$

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2 \times 2} = \frac{3}{4} = 0,75$

$$\beta \; f(\alpha) = f\left(\frac{3}{4}\right) = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \times \left(\frac{3}{4}\right) + 4$$

$$= 2 \times \frac{9}{16} - \frac{9}{4} + 4$$

$$= \cancel{2} \times \frac{9}{8 \times \cancel{2}} - \frac{9}{4} + 4$$

$$= \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 4$$

$$= \frac{9}{8} - \frac{18}{8} + 4$$

$$= \frac{-9}{8} + 4$$

$$= \frac{-9}{8} + \frac{32}{8} = \frac{23}{8}$$

Propriété : Soit f une fonction trinôme du second degré dont la forme canonique est $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

si $a > 0$ alors f est décroissante sur $]-\infty ; \alpha[$ et croissante sur $]\alpha ; +\infty[$

Si $a < 0$ alors f est croissante sur $]-\infty ; \alpha[$ et décroissante sur $]\alpha ; +\infty[$

Le sommet de la parabole est $S(\alpha ; \beta)$

Demonstration : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ $\boxed{a > 0}$

Soit x_1 et $x_2 \in]-\infty ; \alpha[$ tels que $x_1 < x_2$

$x_1 < x_2$ Or $x_1 < \alpha$ $x_2 < \alpha$

$x_1 - \alpha < x_2 - a$ (< 0) et la fonction carrée est décroissante sur $]-\infty ; 0]$

$(x_1 - \alpha)^2 > a(x_2 - \alpha)^2$ $a(x_1 - \alpha)^2 > a(x_1 - \alpha)^2$ car $a > 0$

$a(x_1 - \alpha)^2 + \beta > a(x_2 - \alpha)^2 + \beta$

$f(x_1) > f(x_2)$

Donc f est décroissante sur $]-\infty ; \alpha[$.

Application :

Soit $f \mid f(x) = -2(x-3)^2 + 4$

$\boxed{\text{Prouve que}}$ f est décroissante sur $]3;+\infty[$

Soit x_1 et $x_2 \in\,]3;+\infty[\;/\; x_1 < x_2$

$$x_1 < x_2$$
$$x_1 - 3 < x_2 - 3$$
$$(x_1-3)^2 < (x_2-3)^2 \longrightarrow$$
$$-2(x_1-3)^2 > -2(x_2-3)^2$$
$$-2(x_1-3)^2 + 4 > -2(x_2-3)^2 + 4$$
$$f(x_1) > f(x_2)$$

$x_1 - 3 > 0$; $x_2 - 3 > 0$ et $x \mapsto x^2$ est croissante sur $]0;+\infty[$

Donc f est décroissante sur $]3;+\infty[$

La courbe représentative d'une fonction f qui a pour expression $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ est une parabole symetrique par rapport à la droite qui a pour équation $x = \alpha$.