Devoir de spécialité mathématiques n°3

Partie I

Exercice I : Pondichéry 15 avril 2013

Partie A

1. Ce graphe est connexe et a 2 sommets de degré impair (D est d'ordre 5 ; G est d'ordre 3), donc d'après le théorème d'Euler, il admet une chaîne eulérienne.
   G – F – D – G – E – F – C – A – B – C – D – E – B – D est une chaine eulérienne.

2. Ce graphe a des sommets de degré impair, or d'après le théorème d'Euler, un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair, donc ce graphe n'admet pas de cycle eulérien.

3. On veut donner la matrice M associée au graphe. Les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique en ligne et en colonne. Le coefficient a_{ij} est égal au nombre d'arêtes reliant le i-ème sommet et le j-ème sommet.

   Ainsi, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Partie B

1. On veut déterminer le plus court chemin en minutes reliant la gare B à la gare G. Il faut donc utiliser l'algorithme de Dijkstra. On montre les étapes de l'algorithme dans un tableau.

	à A	à C	à D	à E	à F	à G
B	**4(B)**	7(B)	18(B)	21(B)	∞	∞
A(4_B)	-	**7(B)** ~~12(A)~~	18(B)	21(B)	∞	∞
C(7_B)	-	-	~~18(B)~~ **17(C)**	21(B)	32(C)	∞
D(17_C)	-	-	-	**21(B)** ~~32(D)~~	~~32(C)~~ 29(D)	48(D)
E(21_B)	-	-	-	-	**29(D)** ~~31(E)~~	~~48(D)~~ 38(E)
F(29_D)	-	-	-	-	-	~~38(E)~~ **36(F)**
G(36_F)	-	-	-	-	-	-

On remonte le tableau à partir de la dernière ligne pour trouver le plus court chemin (à l'envers) : G – F – D – C – B. Le plus court chemin est donc : B – C – D – F – G.
La longueur en minutes de ce chemin est de $7 + 10 + 12 + 7 = 36$ minutes.

Exercice V : Baccalauréat ES Asie 20 juin 2012

1. Il est nécessaire de donner au minimum 9 jetons à chaque candidat car il y a 9 chemins.

2. Le graphe est connexe et tous les sommets du graphe sont de degré pair. Donc, d'après le théorème d'Euler, le graphe admet un cycle eulérien et il est ainsi possible pour un candidat de faire le parcours en empruntant tous les chemins une fois et une seule. F – B – A – E – C – A – F – C – D – F est un cycle eulérien.

3. a. On veut donner la matrice M associée au graphe. Les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique en ligne et en colonne. Le coefficient a_{ij} est égal au nombre d'arêtes reliant le i-ème sommet et le j-ème sommet.

   Ainsi, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   b. On lit le coefficient a_{24} de la matrice M^3 : 3. Il y a donc 3 chemins de longueur 3 entre D et B. On fait de même pour M^2, on lit 1. Il y a donc 1 chemin de longueur 2 entre D et B. Il y a donc 4 chemins de longueur 3 et moins entre D et B.

   c. La question peut être interprétée de deux manières différentes. Devons-nous donner le plus court chemin de longueur 3 maximum ou le plus court chemin sans limite de longueur ? Il pourrait y avoir une différence.

   i. *Le plus court chemin de longueur 3 maximum*

   Les différentes possibilités sont :

Chemin	Distance
D – F – B	$6 + 10 = 16$
D – F – A – B	$6 + 6 + 2 = 14$
D – C – A – B	$2 + 6 + 2 = 10$
D – C – F – B	$2 + 2 + 10 = 14$

   Le plus court chemin de longueur 3 maximum est donc D – C – A – B car sa distance, 10km, est la plus courte.

   ii. *Le plus court chemin sans limite de longueur (Algorithme de Dijkstra)*

	à A	à B	à C	à E	à F
D	∞	∞	**2(D)**	∞	6(D)
$C(2_D)$	8(C)	∞	-	6(C)	~~6(D)~~ **4(C)**
F(4c)	8(C) ~~10(F)~~	14(F)	-	**6(C)**	-
E(6c)	**8(C)** ~~10(E)~~	14(F)	-	-	-
A(8c)	-	~~14(F)~~ **10(A)**	-	-	-
$B(10_A)$	-	-	-	-	-

Le plus court chemin est donc D – C – A – B.