Les Suites numériques.

☺ Le raisonnement par récurrence.

Principe : Si la propriété P est :

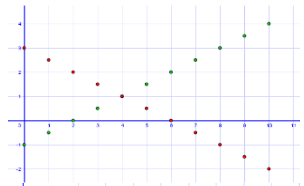
- vraie au rang n_0 (Initialisation),
- héréditaire à partir du rang n_0 (Hérédité),

alors la propriété P est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

ROC : inégalité de Bernoulli.

Soit un nombre réel a strictement positif, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \geq 1 + na$.

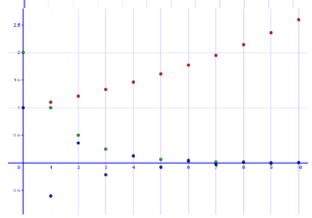
☺ Suites arithmétiques.



$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$ $u_n = u_0 + n\,r$

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$.

☺ Suites géométriques.



$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q\,u_n$ $u_n = u_0 \times q^n$

$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$.

Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

ROC : Si $q > 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

☺ Généralités sur les suites.

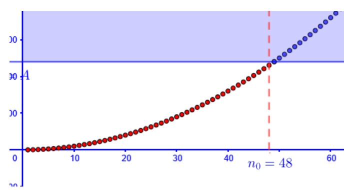
(u_n) est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$. ($u_{n+1} - u_n \geq 0$)

(u_n) est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$. ($u_{n+1} - u_n \leq 0$)

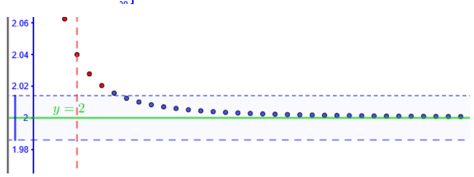
☺ Limites de suites.

Def :

◆ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 / \forall n \geq n_0, u_n \geq A$.



◆ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L,\ L \in \mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang



Limites de suites usuelles.

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$; $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

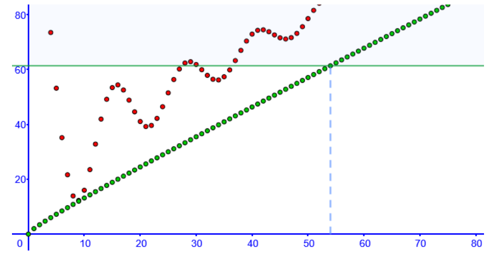
Opérations sur les limites.

Formes indéterminées : $(+\infty) + (-\infty)$; $\infty \times 0$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$

☺ Limites et comparaison.

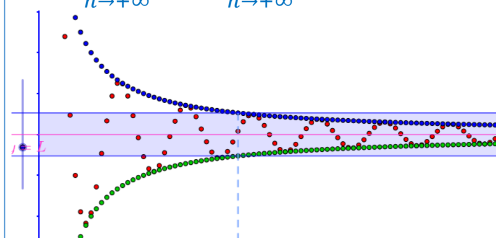
ROC : Théorème de comparaison :

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $v_n \geq u_n$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.



Théorème d'encadrement (théorème des gendarmes):

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = L$ et $v_n \geq u_n \geq w_n$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.



☺ Suites majorées, minorées, bornées.

- (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout n, $u_n \leq M$.
- (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout n, $u_n \geq m$.
- (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Théorème de convergence monotone :

- Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.

Corollaire :

- Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
- Si une suite décroissante est non minorée alors elle tend vers $-\infty$.