Suites arithmético-géométriques.

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est une <u>arithmético-géométrique</u> s'il existe deux nombres a et b tels que pour tout entier n, $u_{n+1} = a\,u_n + b$.

Exemple : Un investisseur dépose 10000 € sur un compte rémunéré à 5% par an. Chaque année suivante, il dépose 500€ de plus. On note (u_n) la somme épargnée à l'année n.

On a alors : u_{n+1} = ...u_n + ... et u_0 = ... La suite (U_n) est arithmético-géométrique.

☑ Savoir faire : Savoir étudier une suite arithmético-géométrique (exemple BAC):

Une réserve décide d'implanter sur son vaste territoire de savane une nouvelle population d'antilopes, des impalas. Au 1er janvier 2013, 2 500 impalas sont lâchés. Les scientifiques zoologistes estiment que le nombre d'impalas augmentera chaque année de 4 % par le simple jeu des naissances et des décès naturels.
Pour limiter les phénomènes de consanguinité, 50 impalas supplémentaires seront ajoutés chaque année.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'impalas dans cette réserve au 1er janvier de l'année 2013 + n.

1) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}04\,u_n + 50$.

....

....

....

2) Déterminer u_0, u_1 et u_2.

....

3) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n + 1\,250$.

a. *Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.*

....

....

....

b. *Exprimer v_n en fonction de n.*

....

c. *En déduire que $u_n = 3\,750 \times 1{,}04^n - 1\,250$.*

....

d. *Calculer la limite de la suite (u_n).*

....

....

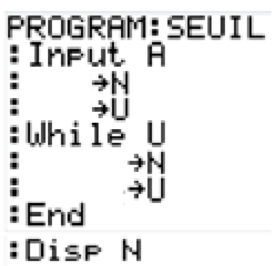
☑ Savoir faire : Savoir déterminer un seuil avec un algorithme :

4) Après une étude approfondie des zoologues, ce modèle d'évolution ne sera plus valable lorsque la population aura doublé par rapport au 1er janvier 2013. Déterminer à partir de quelle année le modèle d'évolution ne sera plus valable.

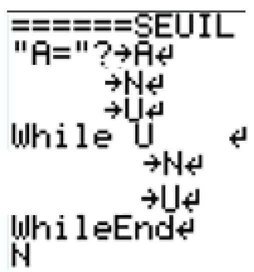
Variables : *n*, *u*
***n* prend la valeur 0**
***u* prend la valeur 2500**
Tant que *u* < ....faire
***n* prend la valeur ....**
***u* prend la valeur ....**
Fin du Tant que
Afficher ....

....
....
....
....
....
....

Sur TI



Sur Casio



☑ *Pondichéry 2013 :*

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le 1er janvier 2000, un client a placé 3 000 (à intérêts composés au taux annuel de 2,5%.On note C_n le capital du client au 1er janvier de l'année 2000+n, où n est un entier naturel.

1. Calculer C_1 et C_2. Arrondir les résultats au centime d'euro.

2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a la relation : $C_n = 3000\times1{,}025^n$.

3. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un nombre S supérieur à 3 000	
Traitement	Affecter à n la valeur 0.	*Initialisation*
	Affecter à U la valeur 3 000	*Initialisation*
	Tant que $U \leq S$	
	n prend la valeur n +1	
	U prend la valeur U ×1,025	
	Fin tant que	
Sortie	Afficher le nombre 2000+n	

a. Pour la valeur S = 3300 saisie, recopier et compléter autant que nécessaire le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à l'unité.

Valeur de n	0	1	....	
Valeur de U	3000		....	
Condition U ≤ S	vrai		....	

b. En déduire l'affichage obtenu quand la valeur de S saisie est 3300.

c. Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter le nombre obtenu en sortie de cet algorithme quand on saisit un nombre S supérieur à 3 000.

4. Au 1er janvier 2013, le client avait besoin d'une somme de 5 000 €. Montrer que le capital de son placement n'est pas suffisant à cette date.

5. Déterminer, en détaillant la méthode, à partir du 1er janvier de quelle année le client pourrait avoir son capital initial multiplié par 10.

☑ *Amérique du nord 2013 :*

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

La bibliothèque municipale étant devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque qui pourra contenir 100 000 ouvrages au total. Pour l'ouverture prévue le 1er janvier 2013, la médiathèque dispose du stock de 35 000 ouvrages de l'ancienne bibliothèque augmenté de 7 000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

Partie A

Chaque année, la bibliothécaire est chargée de supprimer 5% des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et d'acheter 6 000 ouvrages neufs.

On appelle u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année (2013+n). On donne u_0 = 42.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = u_n \times 0{,}95+6$.

2. On propose, ci-dessous, un algorithme, en langage naturel. Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

3. À l'aide de votre calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme.

```
Variables :
   U, N
Initialisation :
   Mettre 42 dans U
   Mettre 0 dans N
Traitement :
   Tant que U < 100
      U prend la valeur U × 0,95 + 6
      N prend la valeur N + 1
   Fin du Tant que
Sortie
Afficher N.
```

Partie B

La commune doit finalement revoir ses dépenses à la baisse, elle ne pourra financer que 4 000 nouveaux ouvrages par an au lieu des 6 000 prévus. On appelle v_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année (2013+n).

1. Identifier et écrire la ligne qu'il faut modifier dans l'algorithme pour prendre en compte ce changement.

2. On admet que $v_{n+1} = v_n \times 0{,}95+4$ avec v_0 = 42.

On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier n, par $w_n = v_n - 80$.

Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison q = 0,95 et préciser son premier terme w_0.

3. On admet que, pour tout entier naturel n : $w_n = -38\times(0{,}95)^n$.

- **a.** Déterminer la limite de (w_n).
- **b.** En déduire la limite de (v_n).
- **c.** Interpréter ce résultat.