

Suites géométriques.

I. Définition d'une suite géométrique.

On considère la suite (u_n) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égal à 3. Si le premier terme est égal à 2, les premiers termes successifs sont : $u_0 = \dots$; $u_1 = \dots = \dots$; $u_2 = \dots = \dots$; $u_3 = \dots = \dots$. De façon plus générale, pour tout nombre entier n , on a $u_{n+1} = \dots$. On dit que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison \dots et de premier terme \dots .

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre q tel que, pour tout n , $u_{n+1} = \dots$. Le nombre q est appelé la raison de la suite (u_n) .

Exemple concret : On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élève à 4%. Chaque année, le capital est multiplié par \dots . Ce capital suit une progression géométrique de raison \dots .

Savoir faire : Savoir démontrer qu'une suite est géométrique :

1) La suite (u_n) définie par : $u_n = 2^{n+3}$ est-elle géométrique ?

Définition

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors, pour tout n , $u_n = u_0 \times q^n$.

Exemple : On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

Savoir faire : Savoir déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique :

1) Soit (u_n) la suite géométrique tel que $u_2 = 12$ et $u_5 = -96$. Détermine sa raison et son premier terme.

II. Sens de variations d'une suite géométrique.

On considère la suite (u_n) définie par : pour tout nombre entier n , $u_n = 3 \times 2^n$. Etudions ses variations.

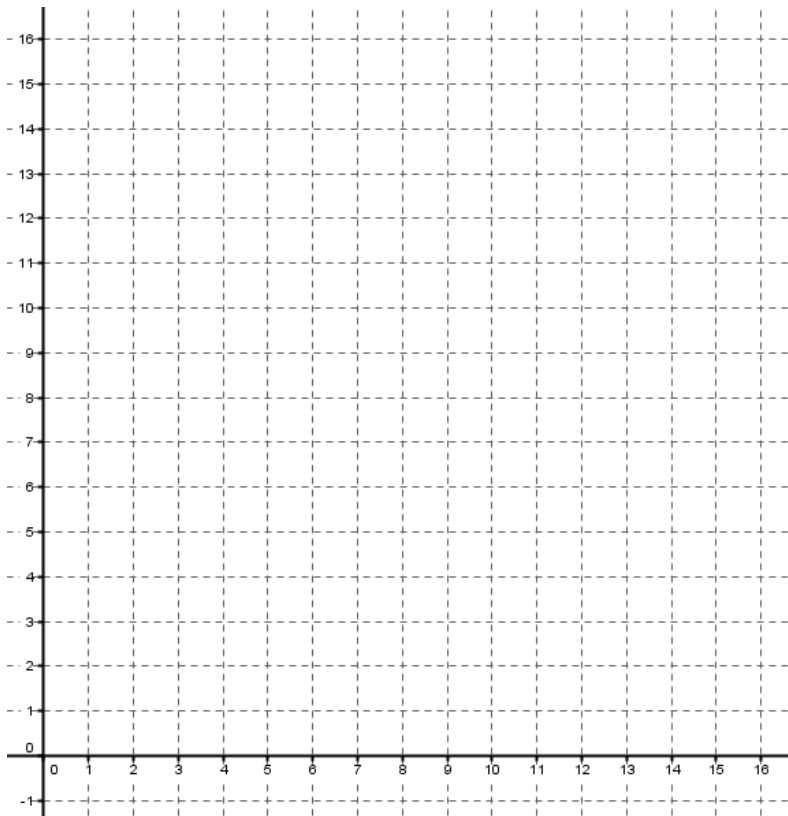
Définition

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q , et de premier terme positif alors :

- ◆ Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
- ◆ Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.

III. Représentation graphique d'une suite géométrique.

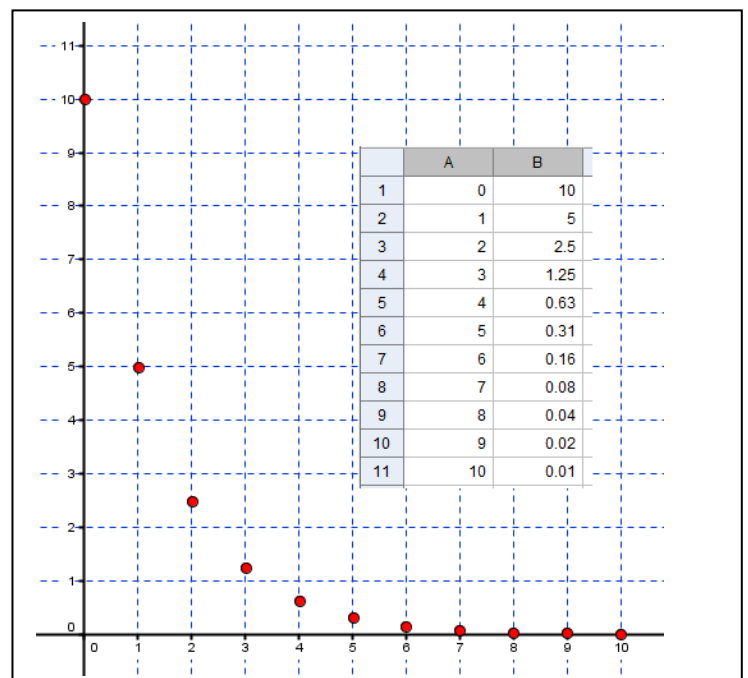
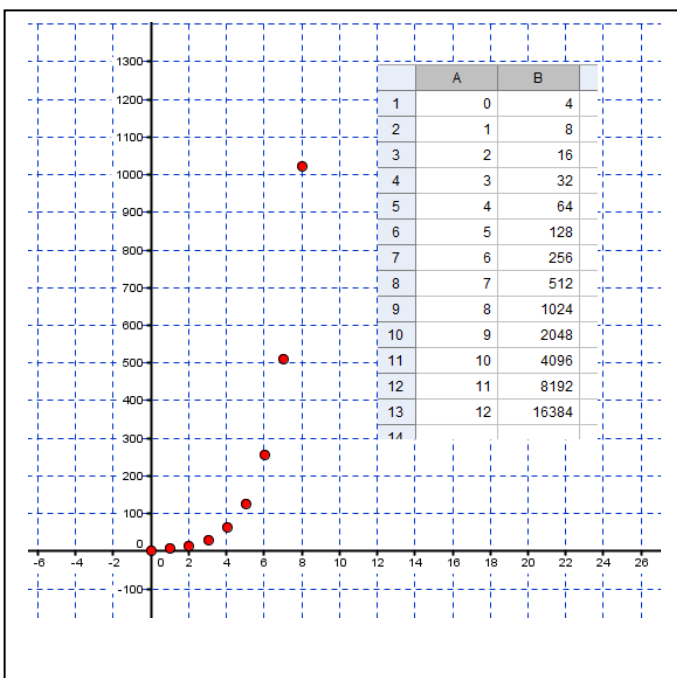
Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 16$ et , pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$. Construire sa représentation graphique.



Tableur		
	A	B
1	n	Un
2	0	
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	
11	9	
12	10	
13	11	
14		

La suite géométrique (u_n) définie par $u_n = 4 \times 2^n$ est.....car.....

La suite géométrique (u_n) définie par $u_n = 10 \times (\frac{1}{2})^n$ est.....car.....



IV. Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique.

Propriété

Si n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a : $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Savoir faire : Savoir calculer la somme des termes d'une suite géométrique:

1) Calculer la somme S suivante : $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10}$.

2) Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

3) Un jeune entrepreneur investit un capital de départ de 20 000 € pour son entreprise. Afin de la dynamiser, il injecte chaque mois une somme supplémentaire à son capital, celle-ci diminue de 30% chaque mois. Calculer le total du capital investi à la fin de la première année.

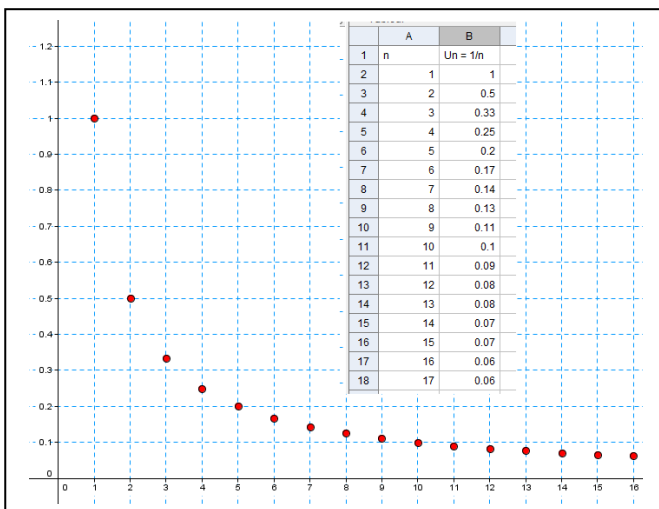
V. Limite d'une suite.

1) Définition.

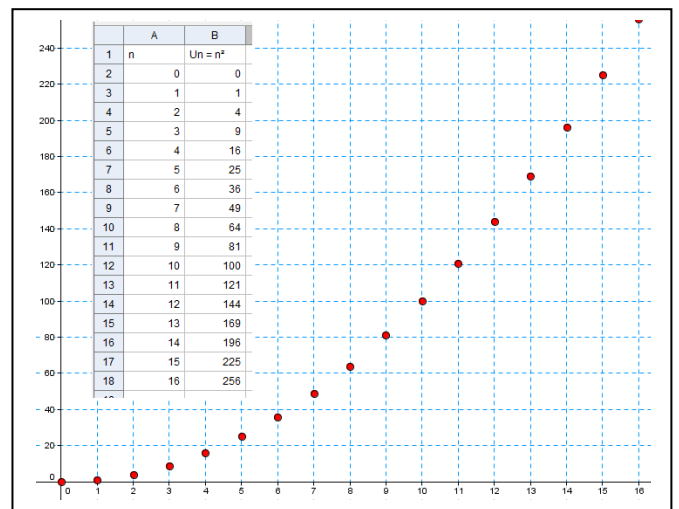
Etudier la limite d'une suite (u_n) , c'est se demander ce que deviennent les nombres u_n lorsque n devient de plus en plus grand.

Exemples :

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$.



On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n^2$.



2) Limite d'une suite géométrique.

a) Limite de la suite (q^n) :

q	$0 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n =$			

Exemples :

.....

b) Opérations sur les limites :

<u>Limite d'une somme</u>		
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	L
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	L'	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) =$	$L + L'$	$+\infty$

<u>Limite d'un produit</u>			
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	$L > 0$	$L < 0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) =$	$L L'$	$+\infty$	$-\infty$

Exemples : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4^n + 3)$

.....

c) Limite d'une suite géométrique:

Propriété

(u_n) est une suite géométrique positive de raison q et de premier terme non nul u_0 .

- ◆ Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- ◆ Si $0 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Savoir faire : Savoir déterminer la limite d'une suite géométrique :

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3}$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + 3 \times \left(\frac{1}{5} \right)^n \right)$ c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3^n - 2^n)$

.....
