Suites géométriques.

Helge Von Koch (1870 ; 1924), *est un mathématicien suédois qui a donné son nom à l'une des premières fractales, le flocon de Von Koch.*

I. Définition d'une suite géométrique.

On considère la suite (u_n) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égal à 3. Si le premier terme est égal à 2, les premiers termes successifs sont : $u_0 =$...... ; $u_1 =$.........=...... ; $u_2 =$.........=......; $u_3 =$.........=...... . De façon plus générale, pour tout nombre entier n, on a $u_{n+1} =$................
On dit que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison .... et de premier terme ....

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre q tel que, pour tout n, $u_{n+1} =$……… .Le nombre q est appelé la raison de la suite (u_n).

Exemple concret : *On place un capital de 1000€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élève à 3%. Chaque année, le capital est multiplié par ....Ce capital suit une progression géométrique de raison ....*

☑ Savoir-faire : Savoir démontrer qu'une suite est géométrique :

La suite (u_n) définie par : $u_n = 2^{n+3}$ est-elle géométrique ?
....
....

Propriété : Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors,
pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n$.

Démonstration exigible :

....
....
....

Exemple : On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.
....

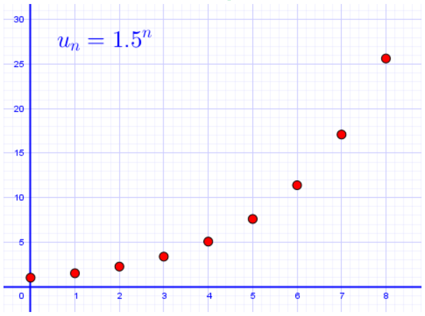
☑ Savoir faire : Savoir déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique :

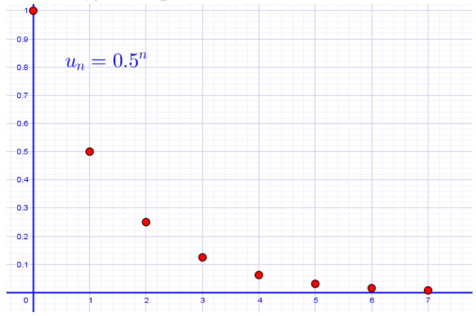
Soit (u_n) la suite géométrique tel que $u_2 = 12$ et $u_5 = -96$. Détermine sa raison et son premier terme.
....
....
....

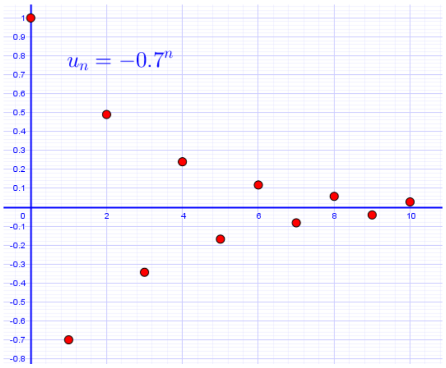
II. Sens de variations d'une suite géométrique.

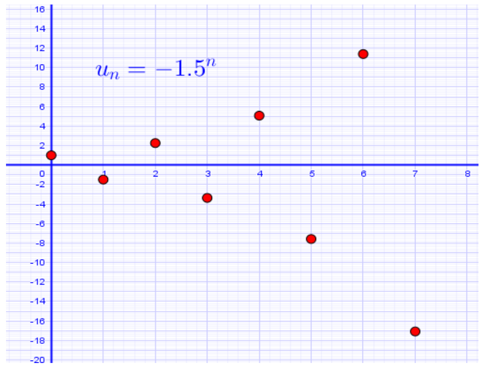
On considère la suite (u_n) définie par : pour tout nombre entier n, $u_n = 3 \times 2^n$. Etudions ses variations.
....
....

☺ Cas particulier : $u_0 = 1,\ u_n = q^n$.









……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………

Propriété : Si (u_n) la suite géométrique définie par $u_n = q^n$,
- ♦ Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
- ♦ Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- ♦ Si $q < -1$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone.

☺ Cas général :

Propriété : Si (u_n) la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q,
- ♦ Si u_0 est positif, alors la suite (u_n) à le même sens de variation que q^n .
- ♦ Si u_0 est négatif, alors la suite (u_n) à le sens de variation contraire de celui de q^n .

Exemple : On considère la suite géométrique (u_n) définie par $u_n = -4 \times 2^n$.

………
………

IV. Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Propriété : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $q \neq 1$, on a : $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Démonstration exigible :

………
………

☑ Savoir-faire : Savoir calculer la somme des termes d'une suite géométrique :

Calcule la somme $S = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + +3^{13}$

………
………
………