Suites arithmétiques.

*Le mathématicien allemand **Carl Friedrich Gauss (1777 ; 1855),** alors âgé de 10 ans calcule la somme des nombres de 1 à 100 en utilisant une méthode astucieuse.*

I. Définition d'une suite arithmétique.

On considère la suite (u_n) où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 3. Si le premier terme est égal à 2, les premiers termes successifs sont : $u_0 = 2$; $u_1 = u_0 + 3 = 5$; $u_2 = u_1 + 3 = 8$; $u_3 = u_2 + 3 = 11$. *De façon plus générale, pour tout nombre entier n, on a* $u_{n+1} = u_n + 3$
On dit que la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 *et de premier terme* $u_0 = 2$.

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre r tel que, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre r est appelé la raison de la suite (u_n).

☑ *Savoir-faire : Savoir démontrer qu'une suite est arithmétique :*

1) La suite (u_n) définie par : $u_n = 2n - 3$ est-elle arithmétique ?

$u_{n+1} - u_n = (2(n+1) - 3) - (2n - 3) = \cancel{2n} + 2 - \cancel{3} - \cancel{2n} + \cancel{3}$

$\forall n$ $u_{n+1} - u_n = 2$ Donc $\forall n$ $u_{n+1} = u_n + 2$

Donc (u_n) est arithmétique de raison 2

2) La suite (u_n) définie par : $u_n = n^2 + 2$ est-elle arithmétique ?

$u_{n+1} - u_n = ((n+1)^2 + 2) - (n^2 + 2) = \cancel{n^2} + 2n + 1 + \cancel{2} - \cancel{n^2} - \cancel{2}$

Donc $u_{n+1} - u_n = 2n + 1$ Donc $u_{n+1} - u_n$ n'est pas constant donc (u_n) n'est pas arithmétique.

Propriété : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 alors, pour tout n, $u_n = u_0 + n \times r$.

Démonstration exigible :

$u_1 = u_0 + r$	$u_4 = u_0 + 4 \times r$
$u_2 = u_1 + r = u_0 + 2 \times r$	...
$u_3 = u_2 + r = u_0 + 3 \times r$	$u_n = u_0 + n \times r$

Exemple : On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

$\forall n$ $u_{n+1} = u_n + 2$ Calculons u_{100} $u_{100} = u_0 + 100 \times r$

$u_{100} = 3 + 100 \times 2 = 203$

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique :*

1) Soit (u_n) la suite arithmétique tel que $u_3 = 5$ et $u_7 = 13$. Détermine sa raison et son premier terme.

$u_3 = 5 = u_0 + 3r$ Donc $u_7 - u_3 = 4r$	Donc $r = \frac{8}{4} = 2$
$u_7 = 13 = u_0 + 7r$ ou $u_7 - u_3 = 13 - 5 = 8$	$u_3 = u_0 + 3 \times 2$ Donc $u_0 = 5 - 6 = -1$

2) Calcule u_{100}.

$u_{100} = u_0 + 100\,r = -1 + 100 \times 2 = 199$

Remarque : Si $p \geq q$, $u_p + (p - q) \times r$

II. Sens de variations d'une suite arithmétique.

On considère la suite (u_n) définie par : pour tout nombre entier n, $u_n = 2n - 3$. Etudions ses variations.

$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 3 - (2n-3) = \cancel{2n} + 2 - \cancel{3} - \cancel{2n} + \cancel{3} = 2$

Donc $\forall n$ $u_{n+1} - u_n \geq 0$ Donc (u_n) est croissante

Propriété : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors :
- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.

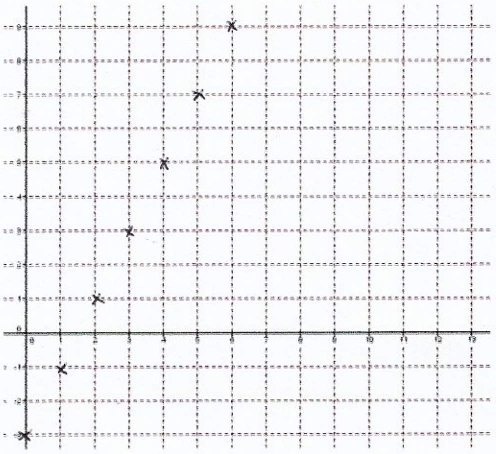
Démonstration :

(u_n) est arithmétique donc $\forall n$, $u_{n+1} - u_n = r$ Donc si $r \geq 0$

$u_{n+1} \geq u_n$, si $r \leq 0$ $u_{n+1} \leq u_n$ ...

III. Représentation graphique d'une suite arithmétique.

On considère la suite (u_n) définie par : pour tout entier n, $u_n = 2n - 3$. Construire sa représentation graphique.



Tableur

	A	B
1	n	Un
2	0	-3
3	1	-1
4	2	1
5	3	3
6	4	5
7	5	7
8	6	9
9	7	11
10	8	13
11	9	15
12	10	17
13	11	19

2*A2-3

Le nuage de points $(n ; u_n)$ représente (u_n). Tous les points sont alignés. Ils appartiennent à $(d) : y = 2x - 3$

IV. Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Propriété : Pour tout entier naturel non nul n, on a : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration exigible :

$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$

$S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$

$2S = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)$

$2S = n(n+1)$

$S = \frac{n(n+1)}{2}$

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer la somme des termes d'une suite arithmétique :*

Calcule les sommes suivantes : $S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 348$. *$S_2 = 33 + 36 + 39 + \ldots + 267$.*

$S_1 = \frac{348 \times 349}{2}$

$S_1 = 60\,726$

$S_2 = 33 + (33 + 1 \times 3) + (33 + 2 \times 3) + \cdots + (33 + 78 \times 3)$

$S_2 = 33 \times 79 + 3(1 + 2 + \cdots + 78)$

$S_2 = 33 \times 79 + 3 \times \frac{78 \times 79}{2} =$