Suites géométriques.

Helge Von Koch (1870 ; 1924), *est un mathématicien suédois qui a donné son nom à l'une des premières fractales, le flocon de Von Koch.*

I. Définition d'une suite géométrique.

On considère la suite (u_n) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égal à 3. Si le premier terme est égal à 2, les premiers termes successifs sont : $u_0 = 2$; $u_1 = 3 U_0 = 6$; $u_2 = 3 U_1 = 18$; $u_3 = 3 U_2 = 54$. De façon plus générale, pour tout nombre entier n, on a $u_{n+1} = 3 \times U_n$.

On dit que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $U_0 = 2$.

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est une <u>suite géométrique</u> s'il existe un nombre q tel que, pour tout n, $u_{n+1} = q \times U_n$. Le nombre q est appelé la <u>raison</u> de la suite (u_n).

<u>Exemple concret :</u> On place un capital de 1000€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élève à 3%. Chaque année, le capital est multiplié par 1,03. Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,03 ($U_0 = 1000$; $U_{n+1} = 1,03 \times U_n$)

☑ Savoir-faire : Savoir démontrer qu'une suite est géométrique :

La suite (u_n) définie par : $u_n = 2^{n+3}$ est-elle géométrique ?

$\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{2^{(n+1)+3}}{2^{n+3}} = \dfrac{2^{n+4}}{2^{n+3}} = 2^{n+4-(n+3)} = 2^1 = 2$ Donc $\forall n$, $U_{n+1} = 2 U_n$

Donc (U_n) est géométrique de raison 2.

Propriété : Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n$.

Démonstration exigible :

(U_n) est géométrique de raison q donc $\forall n$, $U_{n+1} = q \times U_n$

$U_1 = q \times U_0$ | $U_3 = q \times U_2 = q \times q^2 \times U_0 = q^3 \times U_0$

$U_2 = q \times U_1 = q \times q \times U_0 = q^2 \times U_0$ | $U_4 = q \times U_3 = q \times q^4 \times U_0 = q^4 \times U_0$

$\forall n = U_n = q^n \times U_0$

Exemple : On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

$\forall n$, $U_n = 2^n \times 3$ ($U_1 = 6$; $U_2 = 12$, $U_3 = 24$ ......)

☑ Savoir faire : Savoir déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique :

Soit (u_n) la suite géométrique tel que $u_2 = 12$ et $u_5 = -96$. Détermine sa raison et son premier terme.

$U_2 = U_0 \times q^2$

$U_5 = U_0 \times q^5$

$\dfrac{U_5}{U_2} = \dfrac{U_0 \times q^5}{U_0 \times q^2} = q^3$

or $\dfrac{U_5}{U_2} = \dfrac{-96}{12} = -8$

Donc $q^3 = -8$

Donc $q = -2$

$U_2 = U_0 \times (-2)^2 \Leftrightarrow 12 = U_0 \times 4$

$\Leftrightarrow U_0 = 3$

(U_n) est la suite géométrique de raison -2 et de 1er terme 3.

II. Sens de variations d'une suite géométrique.

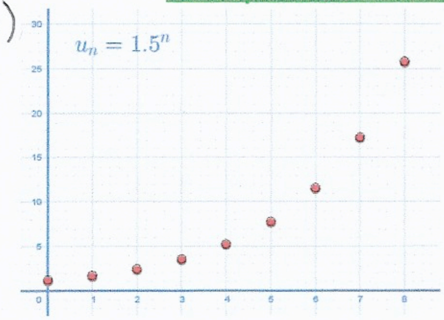
On considère la suite (u_n) définie par : pour tout nombre entier n, $u_n = 3 \times 2^n$. Etudions ses variations.

$U_{n+1} - U_n = 3 \times 2^{n+1} - 3 \times 2^n = 3 \times 2^n \times 2 - 3 \times 2^n \times 1 = 3 \times 2^n \times (2-1) = 3 \times 2^n$

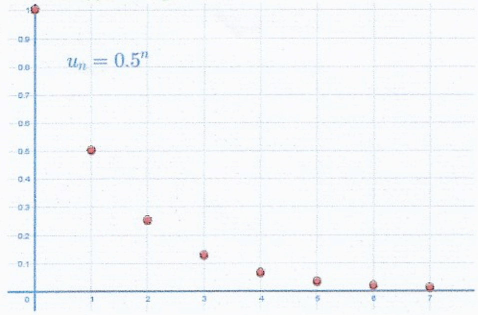
Donc $\forall n$, $U_{n+1} - U_n \geq 0$, donc $\forall n$ $U_{n+1} \geq U_n$, (U_n) est croissante

☺ Cas particulier : $u_0 = 1,\ u_n = q^n$.

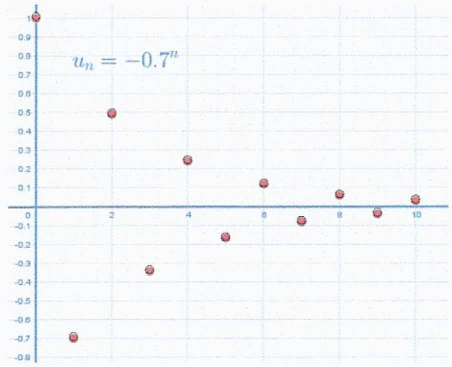
a)



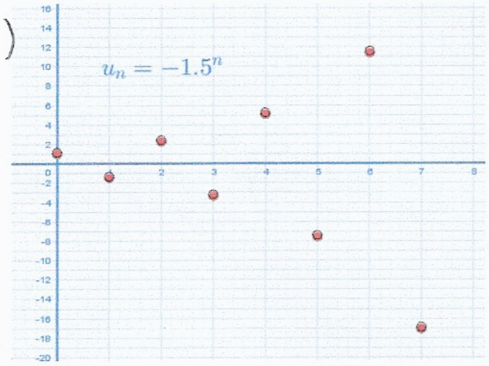
b)



c)



d)



a) $q = 1,5$ $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 1,5 \times U_n \end{cases}$

(U_n) est croissante

On conjecture que $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

b) $q = 0,5$ $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 0,5 \times U_n \end{cases}$

(U_n) est décroissante. On conjecture que $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

c) $q = -0,7$ $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = -0,7 \times U_n \end{cases}$

(U_n) n'est pas monotone. On conjecture que $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

d) $q = -1,5$

(U_n) n'est pas monotone.

(U_n) n'a pas de limite quand $n \to +\infty$

Propriété : Si (u_n) la suite géométrique définie par $u_n = q^n$,

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $q < -1$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone.

☺ Cas général :

Propriété : Si (u_n) la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q,

- Si u_0 est positif, alors la suite (u_n) à le même sens de variation que q^n .
- Si u_0 est négatif, alors la suite (u_n) à le sens de variation contraire de celui de q^n .

Exemple : On considère la suite géométrique (u_n) définie par $u_n = -4 \times 2^n$.

$U_n = -4 \times 2^n$ Donc (U_n) a les variations contraire de telles de (2^n). (2^n) est croissante $(q > 1)$. Donc (U_n) est décroissante.

IV. Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Propriété : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $q \neq 1$, on a : $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Démonstration exigible :

$S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n$

$qS = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q^{n+1}$

$S - qS = 1 - q^{n+1}$

$(1-q)\,S = 1 - q^{n+1}$

Donc $S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer la somme des termes d'une suite géométrique :*

Calcule la somme $S = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + +3^{13}$

$S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{13}$ avec $q = 3$

Donc $S = \frac{1-q^{14}}{1-q} = \frac{1-3^{14}}{1-3} = 2\,391\,484$