BAC BLANC DE ZONE SÉRIE ES - MARS 2014
CORRECTION et BARÈME

Exercice 1 (4 points)

Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples.
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées et une seule est exacte. Aucune justification n'est demandée. Si le candidat inscrit sur sa copie le numéro de la question suivi de la bonne réponse ou de son numéro, il gagne un point. Dans toute autre situation, il ne gagne ni ne perd aucun point.

Question 1.

Soit a , b et c trois nombres réels strictement positifs, avec c différent de 1 .

L'expression $\dfrac{\ln a - \ln b}{\ln c}$ est égale à :

Réponse a.	**Réponse b.**	**Réponse c.**	**Réponse d.**
$\ln \dfrac{a}{c} - \ln \dfrac{b}{c}$	$\ln \dfrac{a}{b} \times \dfrac{1}{\ln c}$	$\ln \dfrac{a-b}{c}$	$\ln \dfrac{a}{bc}$

Les questions 2 à 4 se réfèrent à la situation suivante:

À la suite de la construction d'un barrage, la société d'exploitation estime que :
- le premier mois après la mise en service des turbines, le barrage assurera une production de 300 GW.h ;
- pendant deux ans, la production mensuelle augmentera de 5 % chaque mois avant de se stabiliser.

Question 2.

La production mensuelle, exprimée en GW.h, atteinte au bout de deux ans sera environ égale à :

Réponse a.	**Réponse b.**	**Réponse c.**	**Réponse d.**
540	660	970	7 200

Question 3.

La production totale, en GW.h, assurée par le barrage au cours des deux premières années sera égale à :

Réponse a.	**Réponse b.**	**Réponse c.**	**Réponse d.**
$24 \times 300 \times 1{,}05$	$300 \times \dfrac{1-1{,}05^{25}}{1-1{,}05}$	$6\,000 \times (1{,}05^{24} - 1)$	15 216

Question 4.

On cherche à déterminer à partir de quel mois la production dépassera le double de la production initiale.
La solution de l'inéquation $300 \times 1{,}05^n \geqslant 600$ est donnée par :

Réponse a.	**Réponse b.**	**Réponse c.**	**Réponse d.**
$n \geqslant \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}05}$	$n \geqslant \dfrac{\ln 600 - \ln 300}{1{,}05}$	$n \geqslant \ln 2 - \ln 1{,}05$	$\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{1{,}05}$

Exercice 2 (5 points)

Un hebdomadaire observe, chaque année, un taux de réabonnement de 82 % parmi ses lecteurs et enregistre 2 700 nouveaux abonnés.
On commence l'étude avec un nombre d'abonnés initial $a_0 = 35\ 000$ au 1er janvier 2014 et on note a_n le nombre d'abonnés au 1er janvier de l'année ($2014 + n$).

1. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0{,}82\,a_n + 2\ 700$.

Chaque année, le taux de réabonnement est de 82 % parmi les lecteurs,
donc, l'année $n + 1$, le nombre de lecteurs qui se réabonnent est $0{,}82\,a_n$.
À ceux-là s'ajoutent les 2 700 nouveaux abonnés.
Donc $a_{n+1} = 0{,}82\,a_n + 2\ 700$.

0,5 pt

2. On utilise un tableur pour calculer les termes de la suite (a_n) .

	A	B
1	n	a_n
2	0	35000
3	1	31400
4	2	28448
5	3	26027,36
6	4	24042,4352
7	5	22414,7969

Proposer une formule à écrire en B3 pour calculer a_1 sachant que cette formule, « tirée vers le bas » dans la colonne, a permis de calculer les valeurs successives de la suite (a_n) .

La formule à écrire dans la cellule B3 pour calculer a_1 est = B2*0,82 + 2700 .
On recopie ensuite cette formule dans les cellules B4 à B7.

0,5 pt

3. On veut déterminer le nombre d'abonnés au 1er janvier 2025 au moyen de l'algorithme suivant :

```
Variables a, n
Traitement
n prend la valeur 0
a prend la valeur ...
Tant que n ... faire
        n prend la valeur ...
        a prend la valeur ...
Fin tant que
Sortie
Afficher ...
```

Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il affiche le nombre d'abonnés demandé.

```
Variables a, n
Traitement
n prend la valeur 0
a prend la valeur 35 000
Tant que n < 12 faire
        n prend la valeur n+1
        a prend la valeur 0,82×a+2700
Fin tant que
Sortie
Afficher a
```

1 pt

Enlever 0,25 pt par erreur

4. L'objet de cette question est l'étude numérique de la suite (a_n) .

Soit (u_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n , par $u_n = a_n - 15\,000$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.

$a_{n+1} = 0{,}82\,a_n + 2\,700$ et $u_n = a_n - 15\,000$, donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 15\,000 \\ &= 0{,}82\,a_n + 2\,700 - 15\,000 \\ &= 0{,}82\,a_n - 12\,300 \\ &= 0{,}82\,(a_n - 15\,000) \\ &= 0{,}82\,u_n \end{aligned}$$

De plus $u_0 = a_0 - 15\,000 = 35\,000 - 15\,000 = 20\,000$.

Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 20\,000$ et de raison $q = 0{,}82$.

1 pt

0,25 pt pour le premier terme
+ 0,25 pt pour la raison
+ 0,5 pt pour le calcul

b. Exprimer u_n en fonction de l'entier naturel n .

La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 20\,000$ et de raison $q = 0{,}82$ donc :
$u_n = u_0 \times q^n$
$u_n = 20\,000 \times 0{,}82^n$

0,5 pt

c. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n , on a $a_n = 15\,000 + 20\,000 \times 0{,}82^n$.

$u_n = a_n - 15\,000$, donc :

$$\begin{aligned} a_n &= u_n + 15\,000 \\ &= 20\,000 \times 0{,}82^n + 15\,000 \end{aligned}$$

0,5 pt

d. En utilisant le résultat précédent, déterminer la limite de la suite (a_n) .

En admettant que cette modélisation reste valable, quelle interprétation concrète peut-on en déduire quant au nombre d'abonnés dans les années à venir ?

$0 < 0{,}82 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}82^n) = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (20\,000 \times 0{,}82^n) = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n) = 15\,000$.

On peut donc penser que, si ce modèle reste valable, le nombre d'abonnés à cet hebdomadaire va tendre vers les 15 000 abonnés.

1 pt

0,5 pt pour le calcul de la limite
+ 0,5 pt pour l'interprétation

Exercice 3 – Enseignement spécifique (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Au cours d'une journée, un commercial se déplace pour visiter deux de ses clients afin de leur proposer l'achat d'un produit de grande consommation d'une valeur de 500 euros.

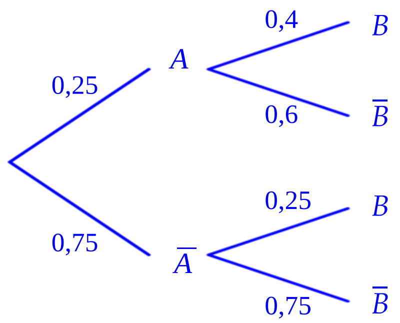
Partie A

Au vu de son expérience, le commercial estime que :

- la probabilité que le premier client visité achète le produit est égale à 0,25 ;
- si le premier client achète le produit, la probabilité que le second client visité achète le produit est égale à 0,4 ;
- si le premier client n'achète pas le produit, la probabilité que le second client visité achète le produit est égale à 0,25.

On note A l'événement « Le premier client achète le produit ».
On note B l'événement « Le deuxième client achète le produit ».

1. Construisez un arbre de probabilité décrivant cette situation.



0,5 pt

0,25 pt pour les évènements + 0,25 pt pour les probabilités

2. En vous servant des probabilités de l'arbre précédent, calculez :

a. la probabilité que les deux clients concluent l'achat ;

$P(A \cap B) = 0{,}25 \times 0{,}4 = 0{,}1$

b. la probabilité qu'un seul des clients conclue l'achat ;

$P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = 0{,}25 \times 0{,}6 + 0{,}75 \times 0{,}25 = 0{,}3375$

c. la probabilité qu'aucun des deux clients ne conclue l'achat.

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}75 \times 0{,}75 = 0{,}5625$

1,5 pt

0,5 pt par question

3. Le commercial perçoit 15 % sur le total de sa vente.

a. Établissez la loi de probabilité associée au gain de la journée.

Gain (€)	0	75	150
Probabilité	0,5625	0,3375	0,1

1 pt

b. Quelle est l'espérance mathématique du gain (arrondissez au centime d'euro près) ?

Interprétez cette espérance par une phrase en français.

$0 \times 0{,}5625 + 75 \times 0{,}3375 + 150 \times 0{,}1 \approx 40{,}31$, arrondi à 10^{-2}

En moyenne, le commercial peut espérer un gain quotidien d'environ 40,31 € sur des visites de ce type.
Ou :
Le gain moyen par jour sur ce type de visite est d'environ 40,31 €.

0,5 pt

0,25 pt pour l'espérance + 0,25 pt pour l'interprétation

Partie B

On sait que la probabilité qu'un client soit satisfait de la ponctualité du commercial est de 0,7.
On interroge successivement six clients pris au hasard parmi les clients du commercial et on admet que :

- chaque client ne donne qu'une des deux réponses *Satisfait* ou *Non satisfait* ;
- le nombre de clients est suffisamment important pour que ces choix puissent être assimilés à des tirages indépendants avec remise.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de clients satisfaits de la ponctualité du commercial.

1. Justifiez que la loi de probabilité de X est une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres.

On a une épreuve à deux issues (*Satisfait*, de probabilité $0,7$, et *Non satisfait*) que l'on répète 6 fois de suite de manière indépendante et identique.
Donc, la loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres 6 et $0,7$.

0,5 pt

0,25 pt pour la loi avec paramètres
+ 0,25 pt pour la justification

2. **a.** En utilisant votre calculatrice, calculez $P(X = 0)$ et $P(X \leqslant 3)$.
On donnera des valeurs arrondies au dix-millième.

En utilisant les fonctionnalités de la calculatrice, on trouve :

$P(X = 0) \approx 0,0007$ à 10^{-4} près

$P(X \leqslant 3) \approx 0,2557$ à 10^{-4} près

0,5 pt

0,25 pt par résultat

b. Interprétez vos résultats de la question précédente par une phrase en français.

La probabilité qu'aucun client ne soit satisfait est d'environ 0,0007 et la probabilité qu'au plus la moitié des clients soient satisfaits **(Ou :** qu'au moins la moitié des clients ne soient pas satisfaits**)** est d'environ 0,2557.

0,5 pt

0,25 pt par interprétation

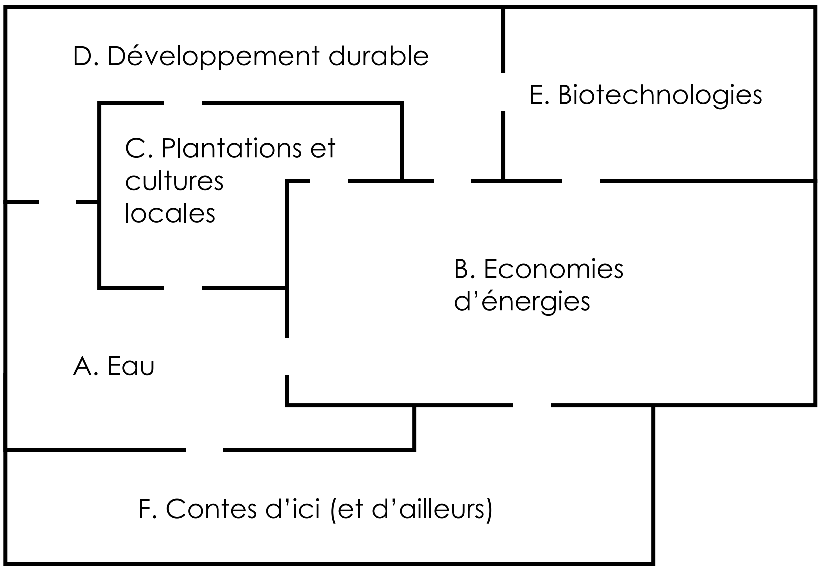
Exercice 3 – Enseignement de spécialité (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

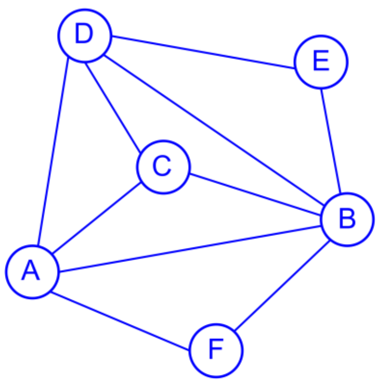
La ville de Manille vient de créer un jardin pédagogique sur le thème de l'écologie, jardin qui doit être visité par la suite par la majorité des écoles de la ville.
Ce jardin comporte six zones distinctes avec les thèmes suivants :

A. Eau	**B.** Économies d'énergies	**C.** Plantations et cultures locales
D. Développement durable	**E.** Biotechnologies	**F.** Contes d'ici (et d'ailleurs)

Ces zones sont reliées par des passages (portes) où sont proposés des questionnaires.
Le jardin et les passages sont représentés sur le plan ci-dessous :



1. **a.** Représentez le jardin et ses passages par un graphe.
Chaque porte et donc chaque questionnaire sera représenté par une arête.



1 pt

b. Si un visiteur répond à tous les questionnaires, à combien de questionnaires aura-t-il répondu ?

S'il répond à tous les questionnaires, un visiteur aura répondu à 10 questionnaires. **0,25 pt**

2. Le graphe est-il complet ? Est-il connexe ?
Justifiez.

Deux sommets ne sont pas reliés (par exemple C et F), donc le graphe n'est pas complet.

Le graphe ne comporte aucun sous-graphe non relié, donc il est connexe.

0, 5 pt

3. Donnez la matrice M associée à ce graphe.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

0, 5 pt

4. Combien de parcours permettent d'aller de la zone A (Eau) à la zone E (Biotechnologies) en répondant exactement à 3 questionnaires.
Vous justifierez votre réponse et vous donnerez les différents parcours possibles.

$$M^3 = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 9 & 11 & 5 & 7 \\ 11 & 10 & 11 & 11 & 8 & 8 \\ 9 & 11 & 6 & 9 & 4 & 4 \\ 11 & 11 & 9 & 8 & 7 & 5 \\ 5 & 8 & 4 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

On trouve à la première ligne (celle de A) et à la 5$^{\text{ème}}$ colonne (celle de E) le coefficient 5.

Donc, il y a 5 parcours permettent d'aller de A à E en répondant exactement à 3 questionnaires.
Ces parcours sont ABDE, ACBE, ACDE, ADBE et AFBE.

1,25 pt

0,25 pour M^3
+ 0,25 pt pour 5
+ 0,25 pt pour l'explication
+ 0,5 pt pour les parcours

5. Peut-on parcourir le jardin en répondant à tous les questionnaires et sans repasser deux fois devant le même questionnaire :

a. en commençant la visite par n'importe quelle zone ?

Répondre à tous les questionnaires sans repasser deux fois par le même revient à chercher des chaînes eulériennes.
Or, on ne peut trouver en trouver que :
- le graphe est connexe, ce qui est le cas,
- si on a seulement deux sommets de degrés impairs, ce qui est le cas avec C de degré 3 et B de degré 5, les autres étant de degrés pairs.

Mais on est obligé de relier C et B.

On ne peut donc pas commencer la visite par n'importe quelle zone.

1 pt

b. en commençant la visite par la zone C (Plantations et cultures locales) ?
Dans ce cas, si la réponse est positive, vous donnerez le parcours complet.

Dans les deux questions **a.** et **b.**, justifiez votre réponse.

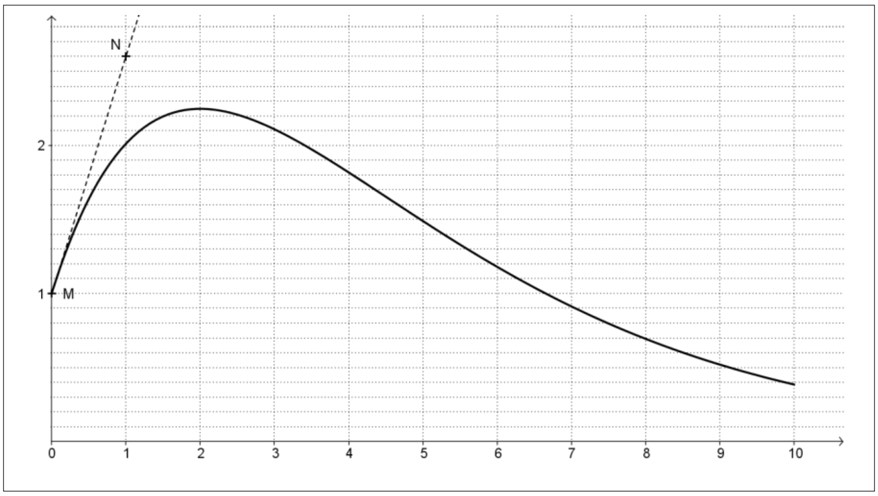
D'après ce qu'on a dit dans la question **a.**, on peut trouver une chaîne eulérienne partant de C.
Par exemple : CBEDBACDAFB.

0, 5 pt

Exercice 4 (6 points)

La partie A peut être traitée indépendamment des parties B et C.

On considère la fonction f définie sur $[\,0\,;\,10\,]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal.



Partie A

On suppose que f est définie par $f(x) = (\,ax + b\,)\,\mathrm{e}^{-0{,}4x}$, où a et b désignent deux constantes réelles.

On sait que :

- le point $M\,(\,0\,;\,1\,)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$,
- la droite (d), tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M passe par le point $N\,(\,1\,;\,2{,}6\,)$.

On note f' la fonction dérivée de f, définie sur $[\,0\,;\,10\,]$.

1. Utiliser le point M pour montrer que $b = 1$.

$M\,(\,0\,;\,1\,) \in \mathscr{C}_f$

donc $f(0) = 1$

$\Leftrightarrow\ (\,a\times 0 + b\,)\,\mathrm{e}^{-0{,}4\times 0} = 1$

$\Leftrightarrow\ b = 1$

0,5 pt

2. a. Vérifier que l'expression de $f'(x)$ en fonction de a est $(\,-0{,}4ax + a - 0{,}4b\,)\,\mathrm{e}^{-0{,}4x}$.

f de la forme uv avec $\begin{cases} u : x \mapsto ax + b \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } u'(x) = a \\ v : x \mapsto \mathrm{e}^{-0{,}4x} \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } v'(x) = -0{,}4\,\mathrm{e}^{-0{,}4x} . \end{cases}$

Donc f dérivable sur $[\,0\,;\,10\,]$ et $f' = u'v + uv'$.

$f'(x) = a\,\mathrm{e}^{-0{,}4x} + (\,ax + b\,)\times(-0{,}4)\,\mathrm{e}^{-0{,}4x}$

$= (\,a + (\,ax + b\,)\times(-0{,}4)\,)\,\mathrm{e}^{-0{,}4x}$

$= (\,-0{,}4ax + a - 0{,}4b\,)\,\mathrm{e}^{-0{,}4x}$

0,5 pt

b. Par lecture graphique, donner la valeur de $f'(0)$.

(d) a pour coefficient directeur $\dfrac{2{,}6 - 1}{2 - 1} = 1{,}6$

donc $f'(0) = 1{,}6$.

0,25 pt

Même sans calcul (1,6 se lit directement)

c. En déduire que $a = 2$.

$f'(0) = 1{,}6$

$\Leftrightarrow\ (\,-0{,}4a\times 0 + a - 0{,}4b\,)\,\mathrm{e}^{-0{,}4\times 0} = 1{,}6$

$\Leftrightarrow\ a - 0{,}4b = 1{,}6$

$\Leftrightarrow\ a - 0{,}4\times 1 = 1{,}6$

$\Leftrightarrow\ a = 1{,}6 + 0{,}4$

$\Leftrightarrow\ a = 2$

0,5 pt

Partie B

On considère que f est définie par $f(x) = (2x + 1)\,e^{-0,4x}$.

1. **a.** Montrer que $f'(x)$ s'annule en $x = 2$.

D'après la Partie A - Question 2. :

$f'(x) = (-0,4ax + a - 0,4b)\,e^{-0,4x}$
$= (-0,4\times 2x + 2 - 0,4\times 1)\,e^{-0,4x}$
$= (-0,8x + 1,6)\,e^{-0,4x}$

$f'(2) = (-0,8\times 2 + 1,6)\,e^{-0,4\times 2}$
$= (-1,6 + 1,6)\,e^{-0,8}$
$= 0$

1 pt

0,5 pt pour la valeur de $f'(x)$
+ 0,5 pt pour la valeur de $f'(2) = 0$
(inutile de résoudre l'équation)

b. Étudier les signes de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0 ; 10]$.
On fera apparaître les valeurs exactes de $f(0)$, $f(2)$ et $f(10)$.

$e^{-0,4x}$ toujours strictement positif,
donc $f'(x)$ est du signe de $-0,8x + 1,6$, donc positif sur $[0 ; 2]$
et négatif sur $[2 ; 10]$.

x	0		2		10
Signes de f'		+	0	−	
Variations de f	1	↗	$5\,e^{-0,8}$	↘	$21\,e^{-4}$

$f(2) = (2\times 2 + 1)\,e^{-0,4\times 2} = 5\,e^{-0,8}$

$f(10) = (2\times 10 + 1)\,e^{-0,4\times 10} = 21\,e^{-4}$

1 pt

0,5 pt pour avoir bien traité l'étude de signe

+ 0,25 pt pour le tableau

+ 0,25 pt pour les valeurs exactes.

2. Justifier que l'équation $f(x) = 1,4$ admet une unique solution α sur $[0 ; 2]$.
Donner la valeur arrondie au centième de α .

f continue et strictement croissante sur $[0 ; 2]$.
De plus, $1,4$ est compris entre $f(0) = 1$ et $f(2) = 5\,e^{-0,8} \approx 2,24$,
donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$
admet une unique solution sur $[0 ; 2]$.

Avec la calculatrice, on obtient : $\alpha \approx 0,28$, arrondi au centième.

1 pt

0,75 pt pour avoir bien identifié les 3 conditions d'utilisation du TVI (même non cité)
+ 0,25 pt pour α

On admettra pour la suite que l'équation $f(x) = 1,4$ admet une unique solution β sur $[2 ; 10]$.
La valeur arrondie au centième de β est $5,28$.

Partie C

Une entreprise fabrique x centaines d'objets avec $0 \leqslant x \leqslant 10$.
La fonction f des parties *A* et *B* modélise le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euros, en supposant que toute la production est vendue.

Dans cette partie, tous les résultats seront arrondis à l'unité.

1. **a.** Combien d'objets l'entreprise doit-elle produire pour réaliser un bénéfice maximum ?

D'après la question **1. *b)*** de la Partie B :
le maximum de la fonction f sur $[0 ; 10]$ est atteint en $x = 2$.

Donc, l'entreprise doit produire 200 objets pour réaliser un bénéfice maximum.

0,25 pt

b. Quel est alors ce bénéfice maximum ?

Le maximum de f sur $[0 ; 10]$ est $f(2) = 5\,e^{-0,8} \approx 2,247$.

Donc, ce bénéfice maximum est 2 247 €.

0,25 pt

c. Sachant que chaque objet est vendu 15 €, quel est le coût de production lorsque le bénéfice est maximum ?

$200 \times 15 - 2\,247 = 753$

Donc, lorsque le bénéfice est maximum, le coût de production est de 753 €.

0,25 pt

2. Combien d'objets l'entreprise doit-elle produire pour réaliser un bénéfice de 1 400 € ?

Le bénéfice vaut 1 400 € lorsque $f(x) = 1{,}4$.

Or, d'après la question **2.** de la Partie B, cette équation admet pour solutions sur $[\,0\,;\,10\,]$: $\alpha \approx 0{,}28$ et $\beta \approx 5{,}28$.

Don, l'entreprise doit produire 28 objets ou 528 objets pour réaliser un bénéfice de 1 400 €.

0,5 pt