

BAC BLANC

MATHÉMATIQUES

Série : ES
Enseignement spécifique

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet comporte 6 pages.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 points)

Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples.

Pour chaque question, quatre réponses sont proposées et une seule est exacte. Aucune justification n'est demandée. Si le candidat inscrit sur sa copie le numéro de la question suivi de la bonne réponse ou de son numéro, il gagne un point. Dans toute autre situation, il ne gagne ni ne perd aucun point.

Question 1.

Soit a , b et c trois nombres réels strictement positifs, avec c différent de 1.

L'expression $\frac{\ln a - \ln b}{\ln c}$ est égale à :

Réponse a.	Réponse b.	Réponse c.	Réponse d.
$\ln \frac{a}{c} - \ln \frac{b}{c}$	$\ln \frac{a}{b} \times \frac{1}{\ln c}$	$\ln \frac{a-b}{c}$	$\ln \frac{a}{bc}$

Les questions 2 à 4 se réfèrent à la situation suivante:

À la suite de la construction d'un barrage, la société d'exploitation estime que :

- le premier mois après la mise en service des turbines, le barrage assurera une production de 300 GW.h ;
- pendant deux ans, la production mensuelle augmentera de 5 % chaque mois avant de se stabiliser.

Question 2.

La production mensuelle, exprimée en GW.h, atteinte au bout de deux ans sera environ égale à :

Réponse a.	Réponse b.	Réponse c.	Réponse d.
540	660	970	7 200

Question 3.

La production totale, en GW.h, assurée par le barrage au cours des deux premières années sera égale à :

Réponse a.	Réponse b.	Réponse c.	Réponse d.
$24 \times 300 \times 1,05$	$300 \times \frac{1 - 1,05^{25}}{1 - 1,05}$	$6\,000 \times (1,05^{24} - 1)$	15 216

Question 4.

On cherche à déterminer à partir de quel mois la production dépassera le double de la production initiale. La solution de l'inéquation $300 \times 1,05^n \geq 600$ est donnée par :

Réponse a.	Réponse b.	Réponse c.	Réponse d.
$n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,05}$	$n \geq \frac{\ln 600 - \ln 300}{1,05}$	$n \geq \ln 2 - \ln 1,05$	$\frac{2^{\frac{1}{n}}}{1,05}$

Exercice 2 (5 points)

Un hebdomadaire observe, chaque année, un taux de réabonnement de 82 % parmi ses lecteurs et enregistre 2 700 nouveaux abonnés.

On commence l'étude avec un nombre d'abonnés initial $a_0 = 35\,000$ au 1^{er} janvier 2014 et on note a_n le nombre d'abonnés au 1^{er} janvier de l'année $(2014 + n)$.

- Justifier que, pour tout nombre entier naturel n , on a $a_{n+1} = 0,82 a_n + 2\,700$.
- On utilise un tableur pour calculer les termes de la suite (a_n) .

	A	B
1	n	a_n
2	0	35000
3	1	31400
4	2	28448
5	3	26027,36
6	4	24042,4352
7	5	22414,7969

Proposer une formule à écrire en B3 pour calculer a_1 sachant que cette formule, « tirée vers le bas » dans la colonne, a permis de calculer les valeurs successives de la suite (a_n) .

- On veut déterminer le nombre d'abonnés au 1^{er} janvier 2025 au moyen de l'algorithme suivant :

```
Variables  $a, n$   
Traitement  
 $n$  prend la valeur 0  
 $a$  prend la valeur ...  
Tant que  $n \dots$  faire  
     $n$  prend la valeur ...  
     $a$  prend la valeur ...  
Fin tant que  
Sortie  
Afficher ...
```

Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il affiche le nombre d'abonnés demandé.

- L'objet de cette question est l'étude numérique de la suite (a_n) .

Soit (u_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n , par $u_n = a_n - 15\,000$.

- Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.
- Exprimer u_n en fonction de l'entier naturel n .
- En déduire que, pour tout nombre entier naturel n , on a $a_n = 15\,000 + 20\,000 \times 0,82^n$.
- En utilisant le résultat précédent, déterminer la limite de la suite (a_n) .

En admettant que cette modélisation reste valable, quelle interprétation concrète peut-on en déduire quant au nombre d'abonnés dans les années à venir ?

Exercice 3 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Au cours d'une journée, un commercial se déplace pour visiter deux de ses clients afin de leur proposer l'achat d'un produit de grande consommation d'une valeur de 500 euros.

Partie A

Au vu de son expérience, le commercial estime que :

- la probabilité que le premier client visité achète le produit est égale à 0,25 ;
- si le premier client achète le produit, la probabilité que le second client visité achète le produit est égale à 0,4 ;
- si le premier client n'achète pas le produit, la probabilité que le second client visité achète le produit est égale à 0,25.

On note A l'événement « Le premier client achète le produit ».

On note B l'événement « Le deuxième client achète le produit ».

1. Construisez un arbre de probabilité décrivant cette situation.
2. En vous servant des probabilités de l'arbre précédent, calculez :
 - a. la probabilité que les deux clients concluent l'achat ;
 - b. la probabilité qu'un seul des clients conclue l'achat ;
 - c. la probabilité qu'aucun des deux clients ne conclue l'achat.
3. Le commercial perçoit 15 % sur le total de sa vente.
 - a. Établissez la loi de probabilité associée au gain de la journée.
 - b. Quelle est l'espérance mathématique du gain (arrondissez au centime d'euro près) ?
Interprétez cette espérance par une phrase en français.

Partie B

On sait que la probabilité qu'un client soit satisfait de la ponctualité du commercial est de 0,7.

On interroge successivement six clients pris au hasard parmi les clients du commercial et on admet que :

- chaque client ne donne qu'une des deux réponses *Satisfait* ou *Non satisfait* ;
- le nombre de clients est suffisamment important pour que ces choix puissent être assimilés à des tirages indépendants avec remise.

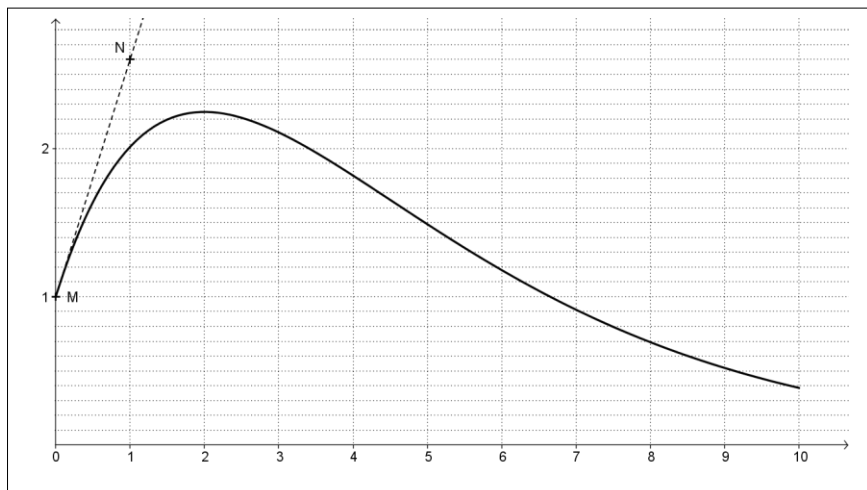
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de clients satisfaits de la ponctualité du commercial.

1. Justifiez que la loi de probabilité de X est une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres.
2.
 - a. En utilisant votre calculatrice, calculez $P(X = 0)$ et $P(X \leq 3)$.
On donnera des valeurs arrondies au dix-millième.
 - b. Interprétez vos résultats de la question précédente par une phrase en français.

Exercice 4 (6 points)

La partie A peut être traitée indépendamment des parties B et C.

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal.



Partie A

On suppose que f est définie par $f(x) = (ax + b)e^{-0,4x}$, où a et b désignent deux constantes réelles.

On sait que :

- le point $M(0 ; 1)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$,
- la droite (d) , tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M passe par le point $N(1 ; 2,6)$.

On note f' la fonction dérivée de f , définie sur $[0 ; 10]$.

1. Utiliser le point M pour montrer que $b = 1$.
2.
 - a. Vérifier que l'expression de $f'(x)$ en fonction de a est $(-0,4ax + a - 0,4b)e^{-0,4x}$.
 - b. Par lecture graphique, donner la valeur de $f'(0)$.
 - c. En déduire que $a = 2$.

Partie B

On considère que f est définie par $f(x) = (2x + 1)e^{-0,4x}$.

1.
 - a. Montrer que $f'(x)$ s'annule en $x = 2$.
 - b. Étudier les signes de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0 ; 10]$.
On fera apparaître les valeurs exactes de $f(0)$, $f(2)$ et $f(10)$.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 1,4$ admet une unique solution α sur $[0 ; 2]$.
Donner la valeur arrondie au centième de α .

On admettra pour la suite que l'équation $f(x) = 1,4$ admet une unique solution β sur $[2 ; 10]$.
La valeur arrondie au centième de β est 5,28.

Partie C

Une entreprise fabrique x centaines d'objets avec $0 \leq x \leq 10$.

La fonction f des parties A et B modélise le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euros, en supposant que toute la production est vendue.

Dans cette partie, tous les résultats seront arrondis à l'unité.

1.
 - a. Combien d'objets l'entreprise doit-elle produire pour réaliser un bénéfice maximum ?
 - b. Quel est alors ce bénéfice maximum ?
 - c. Sachant que chaque objet est vendu 15 €, quel est le coût de production lorsque le bénéfice est maximum ?
2. Combien d'objets l'entreprise doit-elle produire pour réaliser un bénéfice de 1 400 € ?