T. S

Devoir de mathématiques n°2

Durée 3h, calculatrice autorisée.

LFVH

2019-2020

Exercice I. Suites n°1 (2 points)

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

a) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

c) Que peut-on dire sur la convergence de la suite (u_n).

Exercice II. Suites n°2 (3 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$$

1) On considère l'algorithme suivant :

a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

b) Que permet de calculer cet algorithme ?

c) Remplir le tableau ci-dessous. On donnera les valeurs approchées à 10^{-4}
Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

Variables : n, i entiers naturels
u : réel positif
Entrées et initialisation
Lire n
$1 \to u$
Traitement
pour i variant de 1 à n **faire**
$\sqrt{2u} \to u$
fin
Sorties : Afficher u

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée					

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

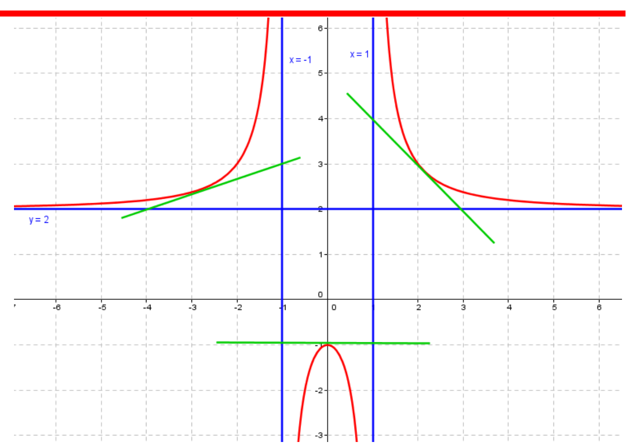
c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Exercice III. Courbe représentative (2 points)

On considère la fonction f représentée ci-contre.

On a représenté ses asymptotes et 3 tangentes.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer f'(-2,5), f'(0) et f'(2)



Exercice IV. Étude de fonction (4 points)

1) Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

   a) Déterminer la fonction dérivée u' puis dresser le tableau de variation de la fonction u. (On ne demande pas de calculer les limites en l'infini).

   b) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 2$.

   c) A l'aide de l'algorithme de dichotomie, déterminer un encadrement de α à 10^{-3}. On donnera le nombre de boucles nécessaires à cet encadrement.

   d) En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

2) Soit la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$.

   a) Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$

   b) Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que : $f'(x) = \dfrac{u(x)}{(1+x^3)^2}$

   c) Déterminer le signe de f' sur $]-1;+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]-1;+\infty[$.

Exercice V. Probabilités conditionnelles (3.5 points)

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

Partie A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ».
$\overline{\text{V}}$ et $\overline{\text{T}}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1) a) Préciser les valeurs des probabilités $P(\text{V})$, $P_{\text{V}}(\text{T})$, $P_{\overline{\text{V}}}(\overline{\text{T}})$.
   Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

   b) En déduire la probabilité de l'évènement $\text{V} \cap \text{T}$.

2) Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,049 2.

3) a) Justifier par un calcul la phrase :
   « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

   b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif. Que peut-on en conclure.

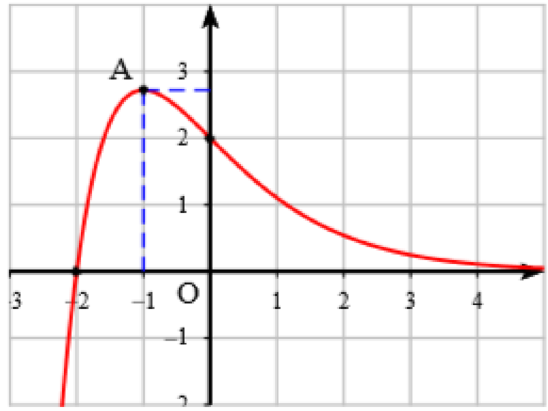
Exercice VI. Fonction exp (1.5 points)

La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax + b)e^{-x}$$

où a et b sont deux réels.

1) À l'aide des renseignements portés sur la figure, déterminer a et b.
2) Calculer $f'(x)$. En déduire les coordonnées du point A maximum de f



Exercice VII. Fonction exp suite (4 points)

Antilles-Guyane juin 2014

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - x + e^x$

   Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).
   En déduire le signe de $g(x)$.
2) Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
3) On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x}g(x)$
4) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.