T. S

Devoir de mathématiques n°1

LFVH
2018-2019

Durée 2h, calculatrice autorisée.

Exercice I. ROC (3 points)

1. Montrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli : Soit un réel a > 0 ∀ ∈ N, $(1 + a)^n > 1 + na$.
2. Démontrer que pour tout nombre $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

Exercice II. (6 points)

Partie A :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.
2. a. Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$.

   b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n : $u_{n+1} = \dfrac{1 + 0,5u_n}{0,5 + u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1+0,5u}{0,5+u}$ Afficher u
	FIN POUR

   Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

   Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

   b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

4. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

   b. montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice III. (3 points)

Calcule les limites suivantes, en justifiant ta réponse :

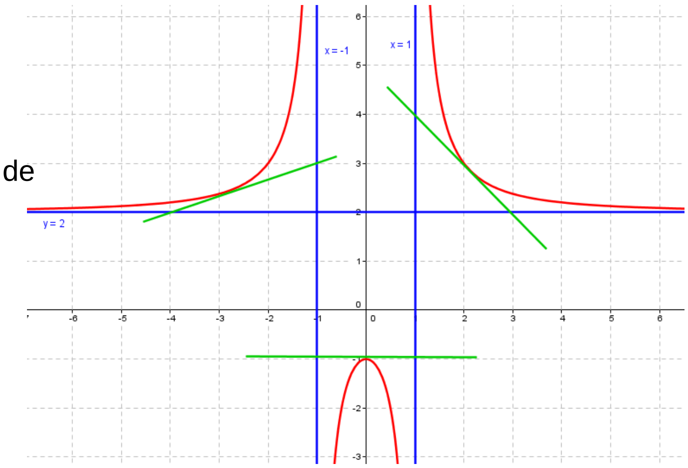
$a)\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x^2-3}{(x+2)(x-1)}$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sin(x)}{x}$ $\quad c)\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n^2-1}$ $\quad d)\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

Exercice IV. (3 points)

On considère la fonction f représentée ci-contre.

On a représenté ses asymptotes et 3 tangentes.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer f'(-2,5), f'(0) et f'(2)



Exercice V. (5 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2+1}$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité 1cm)

1) **Étude d'une fonction auxiliaire**

On pose : $g(x) = x^3 + 3x + 8$

a) Étudier les variations de la fonction g.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [-2; 0]$

c) Déterminer un encadrement à 10^{-3} à l'aide de votre calculatrice.

d) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x

2) **Étude de la fontion f**

a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

b) Calculer $f'(x)$ et montrer que : $f'(x) = \dfrac{x(x^3+3x+8)}{(x^2+1)^2}$

c) À l'aide d'un tableau de signe donner le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

d) En écrivant $f(x) = \dfrac{x(x^3-4)}{x^3+x}$, montrer alors que $f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha$

e) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$

f) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à la droite d'équation $y = x$?