T. S

Devoir de mathématiques n°2

Durée 2h, calculatrice autorisée.

LFVH

2018-2019

Exercice I. ROC (2 points)

1. Montrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli :
Soit un réel a > 0 ∀ ∈ N, $(1 + a)^n > 1 + na$.

2. Démontrer que pour tout nombre q > 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Exercice II. Suites (3 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$

Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 6$ est géométrique, en déduire la limite de (u_n).

Exercice III. Récurrence et convergence monotone (3 points)

Soit (u_n) croissante définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$

Montrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 4, en déduire qu'elle converge.

Exercice IV. Suites, sommes et algorithme (3 points)

On donne l'algorithme suivant :

```
Variables : N, K  entiers  U réel
Entrées et initialisation
  | Lire N
  | 0 → U
Traitement
  | pour K variant de 1 à N faire
  |   | U + 1/K² → U
  | fin
Sorties : Afficher U
```

1. Qu'affiche cet algorithme pour N = 1, N = 2 et N = 3.
On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

2. Cet algorithme calcule le terme général un d'une suite (u_n) en fonction de n. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

3. Rentrer alors ce programme dans votre calculatrice puis compléter le tableau suivant en donnant les valeurs à 10^{-3} près.

N	1	10	50	100	1000	2000
u		1,550				

4. Quelle conjecture sur la convergence de (u_n) peut-on faire?

Exercice V. Limites de Suites (1 points)

Détermine en justifiant : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2n+\sin(n)}{n}$

Exercice VI. Théorème des valeurs intermédiaires (3 points)

Soit le polynôme f définie sur IR par : $f(x) = x^3 - 12x + 17$

1. Etablir le tableau de variations de f
2. Montrer qu'il existe une unique solution α sur IR à l'équation $f(x) = 0$.
3. Donner un encadrement à 10^{-3} près de α.

Exercice VII. (5 points)

Soit la fonction f définie sur]- ∞; 2[U]2 ;+∞[par : $f(x) = 4x + 3 + \frac{9}{x-2}$

1. Montrer que $f(x) = \frac{4x^2-5x+3}{x-2}$

2. Calculer les limites de f en 2, en +∞ et en −∞.

Traduire les résultats en termes d'asymptotes.

3. Déterminer la fonction dérivée $f\,'$.

4. Résoudre $f\,'(x) = 0$ puis déterminer le signe de la dérivée $f\,'$.

5. Dresser le tableau de variation.

"Those who can imagine anything, can create the impossible."
— Alan Turing