T. S

Devoir de mathématiques n°3

Durée 2h, calculatrice autorisée.

LFVH

2018-2019

Exercice I. Suites n°1 (3 points)

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

a) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

c) Que peut-on dire sur la convergence de la suite (u_n).

Exercice II. Suites n°2 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$$

1) On considère l'algorithme suivant :

a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

b) Que permet de calculer cet algorithme ?

c) Remplir le tableau ci-dessous. On donnera les valeurs approchées à 10^{-4}
Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

Variables : n, i entiers naturels
u : réel positif
Entrées et initialisation
Lire n
$1 \to u$
Traitement
pour i variant de 1 à n **faire**
$\sqrt{2u} \to u$
fin
Sorties : Afficher u

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée					

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Exercice III. Probabilités (4 points)

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir.
À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.

La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,98.
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :

- A : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A » ;
- C : « la tablette de chocolat est commercialisable ».

On note x la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1) Montrer que $P(\text{C}) = 0,03x + 0,95$.
2) À l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable.
   Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.
3) Dans cette question, on prend $p(\text{C}) = 0,96$.
   On prélève 10 tablettes de chocolat dans le stock de la chocolaterie, supposé suffisamment important pour que ce prélèvement soit assimilable à un tirage avec remise.
   On appelle X la variable aléatoire associée aux nombre de tablettes commercialisables.
   a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   b) Déterminer la probabilité que l'on trouve que des tablettes commercialisables.
   c) Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 2 tablettes non commercialisables.

Exercice IV. Fonction exponentielle (6 points)

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \text{e}^x + \dfrac{1}{x}$.

1) **Étude d'une fonction auxiliaire**
   a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x^2\text{e}^x - 1$.
      Étudier le sens de variation de la fonction g et déterminer la limite de g en $+\infty$. On dressera le tableau de variation.
   b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
   c) Déterminer un encadrement de a à 10^{-3}
   d) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
2) **Étude de la fonction f**
   a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
      Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel : $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.
   e) Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

Exercice V. Fonction trigonométrique (3 points)

f est la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2}{2 + \cos x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Montrer que la fonction f est paire et déterminer sa période.
3) Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervalle $[0;\pi]$.
4) Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi;\pi]$ et tracer l'allure de la fonction sur $[-\pi; 3\pi]$