Variable aléatoire.

Blaise Pascal (1623 ; 1662) étudiant les jeux de hasard, il expose une théorie nouvelle : les **calculs de probabilités**. Ils s'intéressent à la résolution de problèmes de dénombrement.

I Variable aléatoire et loi de probabilité.

☺ Variable aléatoire.

Définition :

- Chaque résultat d'une expérience aléatoire s'appelle une issue.
- L'univers des possibles Ω est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
- Un événement est un sous-ensemble de l'univers des possibles.
- Un événement élémentaire est un événement contenant une seule issue.

Introduction à la notion de variable aléatoire :

On considère l'expérience aléatoire suivante : "On lance un dé à six faces non truqué et on note le nombre de la face supérieure." L'ensemble de toutes les issues possibles $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ s'appelle l'univers des possibles. On considère l'évènement A : "On obtient un résultat pair." On a donc : A = {2; 4; 6}.

On considère l'événement élémentaire E : "On obtient un 3". On a donc : E = {3}.

On considère le jeu suivant :

- *Si le résultat est pair, on gagne 2€.*
- *Si le résultat est 1, on gagne 3€.*
- *Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4€.*

On a défini ainsi une variable aléatoire X sur $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ qui peut prendre les valeurs 2 ; 3 ou -4

On a donc : $X(1) = 3$, $X(2) = 2$, $X(3) = -4$, $X(4) = 2$, $X(5) = -4$, $X(6) = 2$

Définition : Une variable aléatoire X est une fonction définie sur un univers Ω et à valeur dans R.

☺ Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Revenons au jeu précédent. Déterminons les probabilités de toutes les valeurs pouvant être prise par X.

La probabilité que X soit égal à 2 est $P(X=2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

La probabilité que X soit égal à 3 est $p(X=3) = \frac{1}{6}$

La probabilité que X soit égal à -4 est $p(X=-4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

On peut résumer les résultats dans un tableau :

On dit que ce tableau définit <u>la loi de probabilité</u> de la variable aléatoire X.

x_i	-4	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

Définition : Donner **la loi de probabilité** d'une variable aléatoire X, c'est associer à chaque valeur x_i que peut prendre X, la probabilité $p(X = x_i)$.

Remarque $p(X=-4) + p(X=2) + p(X=3) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer une loi de probabilité :*

On considère l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."
On considère le jeu suivant :
◆ Si on tire un cœur, on gagne 2€. ◆ Si on tire un roi, on gagne 5€. ◆ Si on tire une autre carte, on perd 1€.
On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe le gain ou la perte correspondant.
Déterminer la loi de probabilité de X.

La variable aléatoire X peut avoir comme valeur -1 ; 2 ; 5 et 7

$p(X=-1) = \frac{21}{32}$ $\quad p(X=2) = \frac{7}{32}$ $\quad$ On peut établir la loi de probabilité de X

$p(X=5) = \frac{3}{32}$ $\quad p(X=7) = \frac{1}{32}$

x_i	-1	2	5	7
$p(X=x_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

II Paramètres d'une variable aléatoire.

Définition : Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω et prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.
Pour tout i, on pose $p_i = p(X = x_i)$.

◆ **L'espérance** de X est le nombre $E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \dots + p_n \times x_n = \sum_{k=1}^{k=n} p_k \times x_k$.

◆ **La variance** de X est le nombre :

$V(X) = p_1 \times (x_1 - E(X))^2 + p_2 \times (x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n \times (x_n - E(X))^2$.

◆ **L'écart type** de X est le nombre : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

☑*Savoir-faire : Savoir calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une loi de probabilité :*

On considère l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."
On considère le jeu suivant :
◆ Si on tire un cœur, on gagne 2€. ◆ Si on tire un roi, on gagne 5€. ◆ Si on tire une autre carte, on perd 1€.
On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe le gain ou la perte correspondant.
Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X et interpréter les résultats.

On utilise la loi de probabilité déjà établie.

$E(X) = -1 \times \frac{21}{32} + 2 \times \frac{7}{32} + 5 \times \frac{3}{32} + 7 \times \frac{1}{32} = \boxed{\frac{15}{32}}$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 2{,}28$

$V(X) = \frac{21}{32} \times \left(-1 - \frac{15}{32}\right)^2 + \frac{7}{32} \times \left(2 - \frac{15}{32}\right)^2 + \frac{3}{32} \times \left(5 - \frac{15}{32}\right)^2 + \frac{1}{32} \times \left(7 - \frac{15}{32}\right)^2 \approx 5{,}1865$

◆ L'espérance peut être interprétée comme la moyenne que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois. Si la variable aléatoire désigne le gain d'un jeu, on dit que ce jeu est équitable lorsque $E(X) = 0$

◆ Par analogie avec les statistiques, *la variance et l'écart type sont des indicateurs de dispersion des valeurs autour de l'espérance.*

☺ Linéarité de l'espérance.

Propriété : Soit a et b deux nombres réels et X une variable aléatoire X.
- $E(aX+b) = a\,E(X)+b$.
- $V(aX+b) = a^2\,V(X)$.

démonstration

$E(aX+b) = \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i+b) = a\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + b\sum_{i=1}^{n} p_i = aE(X)+b \quad (\sum_{i=1}^{n} p_i = 1)$

$V(aX+b) = \sum_{i=1}^{n} p_i\left(ax_i+b-(aE(X)+b)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i-E(X))^2 = a^2\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-E(X))$

$= a^2\,V(X)$

☑Savoir-faire : Savoir simplifier les calculs d'espérance et de variance à l'aide d'une variable aléatoire de transition :

Une entreprise qui fabrique des roulements à bille fait une étude sur une gamme de billes produites. Le diamètre théorique doit être égal à 1,3 cm mais cette mesure peut être légèrement erronée. L'expérience consiste à tirer au hasard une bille d'un lot de la production et à mesurer son diamètre.
On considère la variable aléatoire X qui à une bille choisie au hasard associe son diamètre.
La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	1,298	1,299	1,3	1,301	1,302
$p(X=x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculer l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X.

Pour simplifier les calculs, on définit la variable aléatoire $Y = 1000X - 1300$. La loi de probabilité de Y est :

y_i	-2	-1	0	1	2
$p(Y=y_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

calculons l'espérance et la variance de Y

$E(Y) = -2\times0{,}2 + (-1)\times0{,}1 + 0\times0{,}2 + 1\times0{,}4 + 2\times0{,}1 = 0{,}1$

$V(Y) = 0{,}2\times(-2-0{,}1)^2 + 0{,}1\times(-1-0{,}1)^2 + 0{,}2\times(0-0{,}1)^2 + 0{,}4\times(1-0{,}1)^2 + 0{,}1\times(2-0{,}1)^2 = 1{,}69$.

On en déduit la variance et l'espérance de X.

$E(Y) = E(1000X-1300) = 1000\,E(X) - 1300 = 0{,}1$ donc $E(X) = \frac{1300+0{,}1}{1000}$

$E(X) = 1{,}3001$

$V(Y) = V(1000X-1300) = 1000^2\,V(X) = 1{,}69$ donc $V(X) = \frac{1{,}69}{1000^2}$

et donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1{,}69}{1000^2}} \approx 0{,}0013$.